Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

25. 06. 2014

Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 2. Juli 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: **(15 + 15 = 30 Punkte)**

Robin muss die beiden Kinder *Sasha* und *Kaya* bespaßen. Um zumindest eine Zeit lang Ruhe zu haben kauft Robin häufig einen großen Haufen kleiner Tütchen mit essbarem Gummizeug. In jedem Tütchen befindet sich eine *Gummischlange* und eine *Gummieidechse*. Es gibt die Gummischlangen und Gummieidechsen in drei Größen, wobei die kleinste Größe einfarbig, die mittlere Größe zweifarbig (aufgeteilt in Kopf und Rest) und die große Größe dreifarbig (Kopf, Rumpf und Schwanz) ist.

Um Robin noch weiter in den Wahnsinn zu treiben, will Sasha nur Gummischlangen haben und Kaya nur Gummieidechsen. Außerdem muss Robin immer ein Tütchen auswählen und dann die Gummischlange und die Gummieidechse mit dem Kopf nach links auf den Tisch legen. Dann muss Robin das nächste Tütchen wählen und die Gummischlange und die Gummieidechse rechts (mit dem Kopf nach links) an die anderen Gummitiere anlegen. So entstehen mit der Zeit zwei lange Reihen von Gummischlangen und Gummieidechsen.

Als ob das noch nicht genug wäre bestehen Sasha und Kaya darauf, dass in beiden Reihen dieselbe Reihenfolge von Farben auftritt und beide Reihen exakt gleich lang sind. Zum Glück sind die mittleren Gummitiere exakt doppelt so lang wie die kleinen Gummitiere und die großen Gummitiere exakt dreimal so lang wie die kleinen Gummitiere.

Dieses Spielchen wiederholt sich immer wieder, weswegen Robin versucht passende Tütchen zu kaufen. Im örtlichen Süßwarenladen werden verschieden Sorten Tütchen mit jeweils einer Gummischlange und einer Gummieidechse verkauft. Von jeder Sorte Tütchen sind ausreichend viele vorhanden. Robin kann also beliebig viele Tütchen kaufen.

(a) Am *Montag* sind folgende vier Sorten Tütchen vorhanden (leider sind Tütchen mit kleinen Gummitieren ausverkauft):

- Eine mittlere Gummischlange mit rotem Kopf (abgekürzt: $\mathtt{r}$) und grünen Rest (abgekürzt: $\mathtt{g}$). Zusammen mit einer großen Gummieidechse mit blauem Kopf (abgekürzt: $\mathtt{b}$), orangem Rumpf (abgekürzt: $\mathtt{o}$) und rotem Schwanz. Die beiden Gummitiere kann man somit auch als die beiden Wörter $\mathtt{rg}$ und $\mathtt{bor}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{b}, \mathtt{g}, \mathtt{o}, \mathtt{r}\}$ auffassen.
- Eine große Gummischlange mit rotem Kopf, blauem Rumpf und orangem Schwanz. Zusammen mit einer mittleren Gummieidechse mit orangem Kopf und rotem Rest.
- Eine große Gummischlange mit blauem Kopf, grünem Rumpf und orangem Schwanz. Zusammen mit einer mittleren Gummieidechse mit blauem Kopf und grünem Rest.
- Eine mittlere Gummischlange mit blauem Kopf und grünem Rest. Zusammen mit einer großen Gummieidechse mit grünem Kopf, blauem Rumpf und grünem Schwanz.

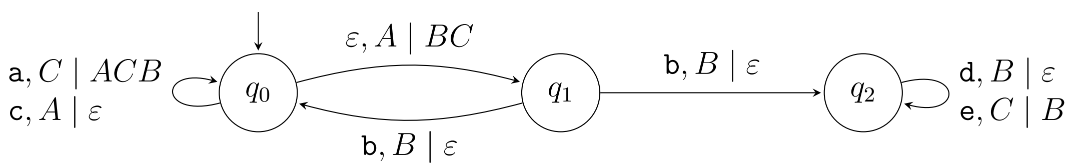
(b) Am *Dienstag* hat der Süßwarenladen folgende Tütchen zur Auswahl:

- Eine mittlere Gummischlange mit blauem Kopf und grünem Rest. Zusammen mit einer kleinen blauen Gummieidechse.
- Eine mittlere Gummischlange mit blauem Kopf und grünem Rest. Zusammen mit einer mittleren Gummieidechse mit rotem Kopf und blauem Rest.
- Eine kleine blaue Gummischlange. Zusammen mit einer große Gummieidechse mit grünem Kopf, blauem Rumpf und orangem Schwanz.
- Eine mittlere Gummischlange mit orangem Kopf und rotem Rest. Zusammen mit einer mittleren Gummieidechse mit grünem Kopf und orangem Rest.

Gibt es eine Kombination von Tütchen, so dass Robin die Kinder zufrieden stellen kann. Wenn ja, welche Tütchen muss Robin in welcher Reihenfolge öffnen? Wenn nein, dann beweisen Sie Ihre Aussage. Geben Sie dies sowohl für die Tütchenauswahl von *Montag* als auch für die Tütchenauswahl von *Dienstag* an.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Sei $A := (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}, \mathtt{e}\}, \{A, B, C\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, C, \emptyset)$ ein PDA, der Eingaben bei leerem Keller akzeptiert, wobei δ durch folgende Grafik gegeben ist:



Wandeln Sie den PDA A durch Anwendung der Tripelkonstruktion in eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_K(A)$ um.

Aufgabe 3: (12 + 18 = 30 Punkte)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass FIN $\subset$ REG $\subset$ DCFL $\subset$ CFL $\subset$ CSL. Bestimmen Sie für die Sprachen L_i mit $i \in \{1, 2\}$ welche der obigen benachbarten Sprachklassen L_i trennt. Bestimmen Sie also ob (i) $L_i \notin$ FIN aber $L_i \in$ REG, (ii) $L_i \notin$ REG aber $L_i \in$ DCFL, (iv) $L_i \notin$ DCFL aber $L_i \in$ CFL oder (v) $L_i \notin$ CFL aber $L_i \in$ CSL.

Beweisen Sie dabei, dass L_i nicht Teil der entsprechenden Sprachklasse ist, indem Sie die in der Vorlesung kennengelernten Beweismethoden benutzen. Sie dürfen dabei die bereits behandelten Sprachen aus dem Skript und vorherigen Übungsblättern benutzen.

Zeigen Sie, dass L_i Teil der entsprechenden Sprachklasse ist, indem Sie eine zur Sprachklasse passende Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = L_i$ oder passenden Automaten A mit $\mathcal{L}(A) = L_i$ konstruieren. Alternativ können Sie auch Abschlusseigenschaften oder eine Kombination von Abschlusseigenschafte und Gramatik- bzw. Automatenkonstruktionen benutzen.

(a) $L_1 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \text{ enthält } \mathtt{aabab} \text{ nicht als Teilwort}\}$

(b) $L_2 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ mit } i \neq j \text{ oder } j \neq k\}$

Aufgabe 4: (15 Punkte)

Gegeben ist die monotone Grammatik $G = (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}, \{S, U, X, Y, Z\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P:

$$\begin{array}{llllll}
S \to \mathtt{a}X\mathtt{cd}, & X \to \mathtt{a}X\mathtt{c}, & \mathtt{a}Y \to \mathtt{ab}Z, & Z\mathtt{c} \to \mathtt{c}Z, & \mathtt{c}U \to U\mathtt{c}, & \mathtt{b}U \to \mathtt{bb}Z, \\
 & X \to Y, & \mathtt{a}Y \to \mathtt{ab}, & Z\mathtt{d} \to U\mathtt{dd}, & & \mathtt{b}U \to \mathtt{bb}.
\end{array}$$

Bestimmen Sie $\mathcal{L}(G)$.