Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

18. 06. 2014

Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 25. Juni 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: **(16 + 16 = 32 Punkte)**

Plutonium-Schorsch hat eine sehr verantwortungsvolle Aufgabe in der *Offenbacher Atommüllmafia*. Er muss jeden Tag eine tiefe *Atommüllgrube* graben, damit eine lange Schlange von Handlangern in Schutzanzügen mit Handkarren voll von radioaktiven *Atommüllkanistern* diese Atommüllkanister einzeln in die Atommüllgrube werfen können. Plutonium-Schorsch zählt dabei die Atommüllkanister indem er sich für jeden Kanister ein `k` notiert.

Nachdem ein Handlanger an der Atommüllgrube fertig ist, geht dieser zu Plutonium-Schorsch und sagt ihm ob er *heftig strahlende Atommüllkanister* (abgekürzt: `h`) oder *ultraheftig strahlende Atommüllkanister* (abgekürzt: `u`) in die Atommüllgrube geworfen hat, was Plutonium-Schorsch ebenfalls notiert. Ein Handlanger hat immer nur einen Strahlungstyp Atommüllkanister im Handkarren. Plutonium-Schorsch erfährt erst so spät um welchen Strahlungstyp Atommüllkanister es sich handelt, da er einen großen Sicherheitsabstand zu den Atommüllkanistern einhalten muss. Wenn ein Handlanger mit Plutonium-Schorsch geredet hat, dann beginnt der nächste Handlanger mit der Entsorgung seiner Atommüllkanister und Plutonium-Schorsch notiert weiter.

So erhält Plutonium-Schorsch am Ende des Tages (wenn alle Handlanger in der Schlange dran waren) ein Wort aus $\mathcal{L}((\mathtt{k}^+(\mathtt{h} \mid \mathtt{u}))^*)$. (Es kam auch schon vor, dass kein einziger Handlanger erschien um Atommüllkanister zu entsorgen.)

Dies braucht Plutonium-Schorsch, da die *Offenbacher Atommüllpatin* angeordnet hat, dass abschließend für jeden heftig strahlenden Atommüllkanister eine Schaufel voll *Bio-Kompost* (abgekürzt: `b`) und für jeden ultraheftig strahlenden Atommüllkanister zwei Schaufeln voll Bio-Kompost von Plutonium-Schorsch in die Atommüllgrube geschaufelt werden müssen. Dadurch soll die Umwelt vor der Strahlung geschützt werden.

(a) Plutonium-Schorsch hätte gerne einen DPDA A_D, der genau die Wörter aus Σ^* mit dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{k}, \mathtt{h}, \mathtt{u}, \mathtt{b}\}$ akzeptiert, so dass diese die richtige Grundform haben (aus der Sprache $\mathcal{L}((\mathtt{k}^+(\mathtt{h} \mid \mathtt{u}))^*\mathtt{b}^*)$ sind) und die Zahl der `b` am Ende der Wörter exakt der Anzahl der Schaufeln voll Bio-Kompost entspricht, die Plutonium-Schorsch am Ende des Tages in die Atommüllgrube schaufeln muss.

Wenn Plutonium-Schorsch nicht die exakt korrekte Menge Bio-Kompost schaufelt, dann ist die Atommüllpatin nämlich sehr unglücklich.

Konstruieren Sie einen solchen DPDA A_D.

(b) Nach einigen Jahren kann Plutonium-Schorsch seinen DPDA A_D nicht mehr verwenden, da 27 Meter große mutierte Eichhörnchen so stark die Erde erschüttern, dass immer wieder die

Symbole auf dem Keller von A_D durcheinander geraten. Deswegen beschließt Plutonium-Schorsch Nichtdeterminismus zu benutzen, damit nur noch ein Kellersymbol benötigt wird. (Dann ist es egal, wenn der Keller durchmischt wird.)

Erstellen Sie einen PDA $A_N = (\Sigma, \{S\}, Q_n, \delta_n, q_0, S, \emptyset)$ mit $\mathcal{L}_K(A_N) = \mathcal{L}(A_D)$. Beachten Sie, dass S das einzige Kellersymbol ist und damit auch das Anfangskellersymbol ist.

Aufgabe 2: **($6 + 6 + 6 + 6 = 24$ Punkte)**

Sei $L := \{ww \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$. Beweisen Sie, dass $\overline{L}$ eine kontextfreie Sprache ist, indem Sie schrittweise für die folgenden Sprachen L_1 bis L_4 beweisen, dass diese kontextfrei sind.

(a) $L_1 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w| \text{ ist ungerade}\}$

(b) $L_2 := \{\mathtt{a}^m\,\mathtt{b}\,\mathtt{a}^n\,\mathtt{a}^m\,\mathtt{c}\,\mathtt{a}^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 := \{u_1\,x\,v_1\,u_2\,y\,v_2 \mid u_1, u_2, v_1, v_2 \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*,\ x, y \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\},\ |u_1| = |u_2|,\ |v_1| = |v_2|,\ x \neq y\}$

(d) $L_4 := \overline{L}$

Hinweise: Für die Sprachen L_i mit $i \in \{2, 3, 4\}$ dürfen Sie annehmen, dass Sie für die Sprachen L_j mit $j \in \{1, 2, 3\}$ und $j < i$ bereits bewiesen haben, dass sie kontextfrei sind.

Aufgabe 3: **(22 Punkte)**

Definition: Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen. Dann ist der Rechts-Quotient von L_1 mit L_2 definiert als

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^* \mid xy \in L_1, y \in L_2\}.$$

Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen abgeschlossen ist unter Rechts-Quotient mit regulären Sprachen. Das heißt: Ist $L \in \mathrm{CFL}$ und $R \in \mathrm{REG}$, dann ist die Sprache L/R kontextfrei.

Aufgabe 4: **($11 + 11 = 22$ Punkte)**

Sei G eine kontextfreie Grammatik.

(a) Zeigen Sie, dass es entscheidbar ist ob $\mathcal{L}(G) = \emptyset$.

(b) Zeigen Sie, dass es entscheidbar ist ob $\mathcal{L}(G)$ eine unendliche Sprache ist.

Geben Sie dazu jeweils einen Algorithmus an, der bei Eingabe von G das jeweilige Entscheidungsproblem löst.