Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

11. 06. 2014
Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 9

Abgabe: *bis 18. Juni 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: (22 Punkte)

> Willkommen in *Theoland*, dem Freizeitpark der theoretischen Informatik!
>
> Hier können Sie im Austausch gegen die in *Theoland* übliche Währung, *Theotaler* und *Theokreuzer*, mit abzählbar vielen theoretischen Fahrgeschäften fahren. Unsere neueste Attraktion ist der *Hamiltonkreisel*. Für besonders Wagemutige empfehlen wir das *Pumping-Lemma-Horrorhaus* und die *Turing Machine*, das Fahrgeschäft bei dem es unentscheidbar ist ob es jemals anhält.
>
> Jetzt fragen Sie sich bestimmt, wie Sie an diese formidablen *Theotaler* und *Theokreuzer* kommen können. Benutzen Sie hierzu die alle sieben Meter aufgestellten Umtauschautomaten. Dort können Sie gebührenfrei 1- und 2-Euro-Münzen in *Theotaler* (4 Euro) und *Theokreuzer* (3 Euro) wechseln. Beachten Sie dazu folgende Anweisung auf jedem Umtauschautomaten:
>
>> Dieser Automat verfügt über einen beliebig großen Münzenstapel. Werfen Sie ausschließlich 1- und 2-Euro-Münzen in den Einwurfschlitz. Jede eingeworfene Münze wird oben auf den Münzenstapel gelegt. Um einen *Theotaler* oder einen *Theokreuzer* zu erhalten drücken Sie die dazugehörige Taste. Wenn Sie die *Theotalertaste* drücken und vom Münzenstapel von oben 1- und 2-Euro-Münzen im Wert von exakt 4 Euro entfernt werden können, dann werden diese entfernt und Sie erhalten einen *Theotaler*. Entsprechend funktioniert die *Theokreuzertaste* für einen Wert von exakt 3 Euro.
>>
>> Restbeträge auf dem Münzenstapel können nicht ausbezahlt werden. Außerdem ist es nicht möglich *Theotaler* und *Theokreuzer* zurück in Euro zu tauschen. Eingetauschte *Theotaler* und *Theokreuzer* sind nur am Tag des Eintausches gültig. Hierzu wird ein Eintauschdatum eingeprägt. Nicht alle Fahrgeschäfte in *Theoland* akzeptieren sowohl *Theotaler* als auch *Theokreuzer* als Zahlungsmittel. Sollten Sie die *Theotalertaste* oder die *Theokreuzertaste* drücken, obwohl sich keine passende Kombination von Euro-Münzen oben auf dem Münzenstapel befindet, dann betrachten wir den Restbetrag auf dem Münzenstapel als großzügige Spende an das *Theoland*.

Konstruieren Sie einen PDA A mit einem Akzeptanzmodus Ihrer Wahl und dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{1}, \mathtt{2}, \mathtt{t}, \mathtt{k}\}$. Hierbei steht `1` bzw. `2` für den Einwurf einer 1- bzw. 2-Euro-Münze und `t` bzw. `k` für den Druck auf die *Theotalertaste* bzw. die *Theokreuzertaste*. Ein Wort aus Σ^* entspricht der Aktionsreihenfolge an einem Umtauschautomaten in *Theoland*. Ihr PDA A soll exakt die Wörter aus Σ^* akzeptieren, so dass nach Abarbeitung des Wortes der Münzenstapel des Umtauschautomaten leer ist (genauso wie am Anfang). Zwischendurch darf der Münzenstapel auch leer werden. Außerdem dürfen in den akzeptierten Wörter die Buchstaben `t` und `k` nur vorkommen, wenn tatsächlich im Umtauschautomaten die passenden Euro-Münzen entfernt werden können. Ihr PDA A simuliert also eine „perfekte“ Benutzung eines Umtauschautomaten in *Theoland*.

Aufgabe 2: **$(7+7+7+9=30$ Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie für die Sprachen L_a, L_b, L_c und L_d, ob diese kontextfrei sind. Ist eine Sprache nicht kontextfrei, dann beweisen Sie dies mit Hilfe der Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen oder dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Ist ein Sprache kontextfrei, dann beweisen Sie dies mit Hilfe der Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen oder konstruieren Sie einen PDA, der die Sprache beschreibt, und begründen warum Ihr PDA die Sprache beschreibt.

(a) $L_a := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{a}^{2i}\mathtt{b}^{j+3} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_b := \{w\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i w^R \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$

(c) $L_c := \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b} = |w|_\mathtt{c} \text{ oder } |w|_\mathtt{a} + |w|_\mathtt{b} + |w|_\mathtt{c} = |w|_\mathtt{d}\}$

(d) $L_d := \{s \cdot \mathtt{c} \cdot r \cdot s \cdot t \mid r, s, t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$ über dem Alphabet $\Sigma_d := \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}$

Hinweise: Für Beweise mit Abschlusseigenschaften dürfen Sie voraussetzen, dass die Sprachen $L_1 := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, $L_2 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $L_3 := \{ww \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$ nicht kontextfrei sind und, dass die Sprachen $L_4 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $L_5 := \{ww^R \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$ kontextfrei sind. Sie dürfen alle Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorherigen Übungsblättern bewiesen wurden.

Aufgabe 3: **(18 Punkte)**

Gegeben ist die Grammatik $G = (\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}, \{S, A, B, C, D\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P:

$$S \to AB \mid AD, \qquad A \to \mathtt{a} \mid \mathtt{b}, \qquad B \to BB \mid DC,$$
$$C \to \mathtt{c} \mid AA, \qquad D \to \mathtt{d} \mid CA \mid AB \mid AD$$

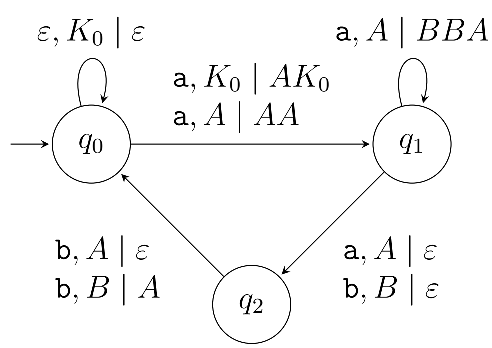
Bestimmen Sie durch Benutzung des CYK-Algorithmus ob $\mathtt{bdbacac} \in \mathcal{L}(G)$. Dokumentieren Sie dabei alle Zwischenschritte indem Sie alle entstehenden Mengen $V_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, 7\}$ und $i \leq j$ aufstellen.

Aufgabe 4: **$(10+20=30$ Punkte)**

(a) Konstruieren Sie für die kontextfreie Grammatik $G := (\{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}, \{S, A, B, C, D\}, P, S)$ mit folgenden Regeln P einen PDA A mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_K(A)$:

$$S \to DD, \qquad A \to \mathtt{a}, \qquad B \to \mathtt{b} \mid CC,$$
$$C \to \mathtt{c}, \qquad D \to AB \mid DD$$

(b) Sei $A := (\Sigma := \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \Gamma := \{K_0, A, B\}, Q := \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, K_0, \emptyset)$ ein PDA, der Eingaben bei leerem Keller akzeptiert, wobei δ durch folgende Grafik gegeben ist:



Wandeln Sie den PDA A durch Anwendung der Tripelkonstruktion in eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_K(A)$ um.