Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

28.05.2014
Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 4. Juni 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: ((10 + 3) + (10 + 3) = 26 Punkte)

(a) Konstruieren Sie für die kontextfreie Sprache

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{\mathtt{a}^{i_1}\mathtt{b}^{i_1}\mathtt{a}^{i_2}\mathtt{b}^{i_2}\cdots\mathtt{a}^{i_n}\mathtt{b}^{i_n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } i_j \in \mathbb{N}_{>0} \text{ für alle } j \in \{1,\dots,n\}\} \\ &= (\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\})^* \end{aligned}$$

eine kontextfreie Grammatik G_1 mit $\mathcal{L}(G_1) = L_1$ und geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort `abaabbab` in Ihrer Grammatik G_1 an.

(b) Konstruieren Sie für die kontextfreie Sprache

$$L_2 := \{x \cdot y \cdot y^R \cdot x^R \mid x \in \{\mathtt{a}, \mathtt{ab}\}^* \text{ und } y \in \{\mathtt{b}, \mathtt{cd}\}^*\}$$

eine kontextfreie Grammatik G_2 mit $\mathcal{L}(G_2) = L_2$ und geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort `aabbcdbbdcbbaa` in Ihrer Grammatik G_2 an.

Aufgabe 2: (8 + 8 + 12 = 28 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen oder den Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen, dass die Sprachen L_3, L_4 und L_5 nicht kontextfrei sind.

(a) $L_3 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k\mathtt{d}^l\mathtt{e}^m\mathtt{f}^n \mid i,j,k,l,m,n \in \mathbb{N} \text{ mit } i = j+k = l+m+n\}$

(b) $L_4 := \{w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c},\mathtt{d}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b} \text{ und } |w|_\mathtt{c} = |w|_\mathtt{d}\}$

(c) $L_5 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i,j,k \in \mathbb{N} \text{ mit } i < j < k\}$

Hinweise: Für Beweise mit Abschlusseigenschaften dürfen Sie voraussetzen, dass die Sprachen $L_a := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m \mid n,m \in \mathbb{N}\}$ und $L_b := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei sind. Sie dürfen alle Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorherigen Übungsblättern bewiesen wurden.

Auf der Rückseite finden Sie weitere Aufgaben.

Aufgabe 3: **(30 Punkte)**

Sei $G = (\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{S, A, B, C, D, E\}, P, S)$ eine kontextfrei Grammatik mit folgenden Regeln P:

- $S \to A\mathtt{a}B \mid BA$
- $A \to \mathtt{a}C \mid \mathtt{b}A$
- $B \to \mathtt{abb}A \mid B\mathtt{a}$
- $C \to DE \mid SDE$
- $D \to \varepsilon \mid \mathtt{ab} \mid C$
- $E \to \varepsilon$

Konstruieren Sie eine Grammatik G_C in Chomsky-Normalform mit $\mathcal{L}(G_C) = \mathcal{L}(G)$ und dokumentieren Sie dabei nachvollziehbar alle Zwischenschritte.

Hinweis: Denken Sie daran, dass Sie diese Schritte etwas optimieren können. Beachten Sie darum den Hinweis im Skript (derzeit Hinweis 4.30).

Aufgabe 4: **(16 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen nicht unter dem Operator shuffle abgeschlossen ist. (Eine Definition von shuffle finden Sie im Skript und auf Übungsblatt 4.)

Hinweise: Sie können hierzu z. B. für die beiden kontextfreien Sprachen

$$L_1 := \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ und } L_2 := \{\mathtt{d}^k\mathtt{c}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

zeigen, dass shuffle(L_1, L_2) keine kontextfreie Sprache ist, indem Sie Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen auf shuffle(L_1, L_2) anwenden, so dass Sie die nicht kontextfreie Sprache $L_3 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ erhalten. Sie dürfen alle Abschlusseigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorherigen Übungsblättern bewiesen wurden.