Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

21.05.2014

Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

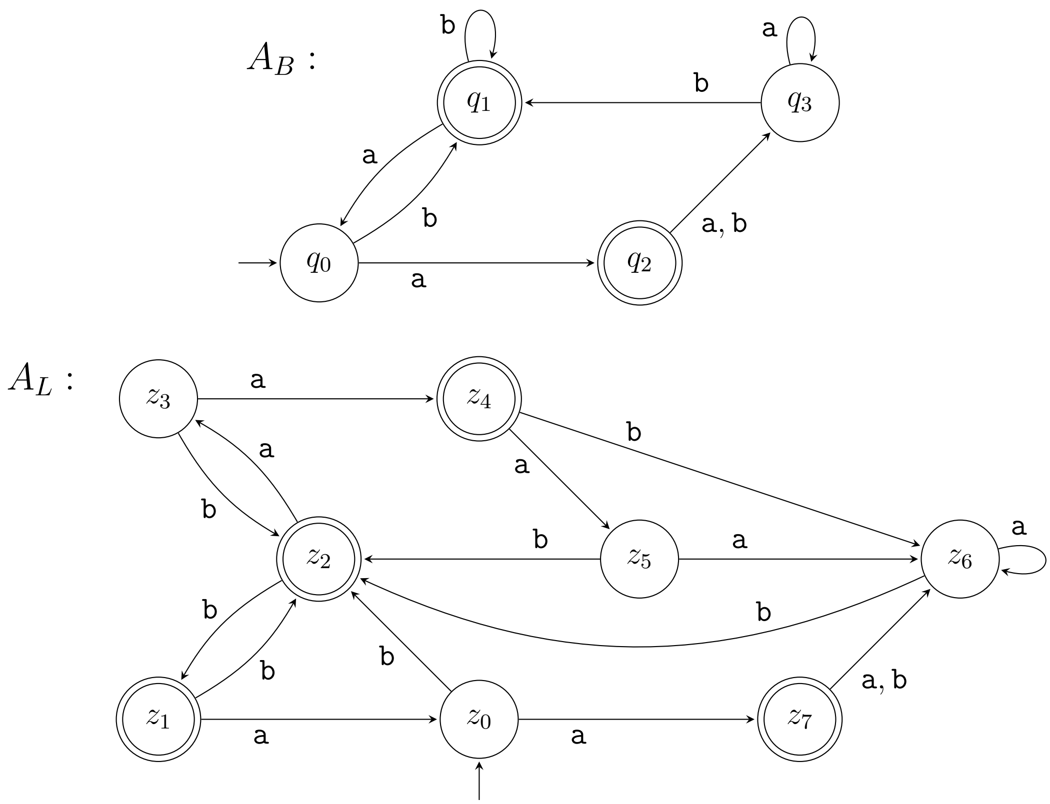
Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 28. Mai 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Der neueste Schrei auf dem Esoterikmarkt sind Namens-DFAs. Unter einem Namens-DFA versteht man den DFA, der gemäß der uralten *Sheng-Fui-Richtlinien* am besten zum eigenen Namen passt und dadurch besonders positive Energien ausstrahlt[1]. Hierfür gibt es bereits zwei Anbieter: Der Anbieter *Bajam* schaltet vorwiegend Werbung im Radiosender *MeUKW*, während *Lazy Mob* vor allem im Kulturfernsehsender *WAWI* wirbt. Horst sendet seinen Namen an beide Anbieter und bekommt kurze Zeit später für eine geringe wöchentliche Gebühr folgende DFAs A_B (von *Bajam*) und A_L (von *Lazy Mob*) über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ zugesendet:



Offensichtlich sind die beiden DFAs nicht identisch, weswegen Horst Beschwerdebriefe an beide Anbieter sendet um sein Geld zurück zu erhalten. In den Antwortschreiben wird Horst jeweils

[1] Zumindest behaupten das die Anbieter dieser Automaten. Skeptiker sind der Meinung, dass diese Namens-DFAs Unsinn sind, der nur erfunden wurde, um leichtgläubigen Leuten das Geld aus der Tasche zu ziehen.

auf das Kleingedruckte hingewiesen, dass es mehrere nach *Sheng-Fui-Richtlinien* optimal zum Namen passende DFAs geben kann und einzig die vom DFA beschriebene Sprache entscheidend ist. *Bajam* und *Lazy Mob* behauten, dass $\mathcal{L}(A_B) = \mathcal{L}(A_L)$ ist und damit kein Anspruch auf Rückerstattung besteht.

Bestimmen Sie, ob wirklich $\mathcal{L}(A_B) = \mathcal{L}(A_L)$ gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **($9 + 9 + 9 = 27$ Punkte)**

Beweisen Sie dass die folgenden Sprachen L_a, L_b und L_c nicht regulär sind.

(a) $L_a := \{\mathtt{a}^{i+1}\mathtt{b}\mathtt{a}^{j^2} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_b := \{w\mathtt{b}^{i+1}\mathtt{a}^{j+1} \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*,\ i, j \in \mathbb{N},\ |w|_\mathtt{a} = j\}$

(c) $L_c := \{\mathtt{a}\mathtt{b}^{i_1}\mathtt{a}\mathtt{b}^{i_2} \cdots \mathtt{a}\mathtt{b}^{i_n} \mid n \in \mathbb{N},\ i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N},\ \text{und für alle } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } i_k = k\}$

Hinweise: Für Beweise mit Hilfe von Abschlusseigenschaften dürfen Sie alle Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorangegangenen Übungsaufgaben bewiesen wurden. Außerdem dürfen Sie voraussetzen, dass $L_1 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $L_2 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid |w|_\mathtt{a} = |w|_\mathtt{b}\}$ und $L_3 := \{\mathtt{a}^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 3: **(16 Punkte)**

Beweisen Sie nur mit Hilfe der Abschlusseigenschaften Homomorphismus, inverser Homomorphismus und Schnitt, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Präfixbildung (dem Operator prefix) abschlossen ist.

Zeigen Sie dazu: Zu jedem Alphabet Σ und jeder regulären Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ existieren zwei Homomorphismen g und h und eine reguläre Sprache L_S, so dass $\text{prefix}(L) = g((h^{-1}(L)) \cap L_S)$.

Aufgabe 4: **($(8 + 8 + 8) + 8 = 32$ Punkte)**

(a) Zeigen Sie die Kontextfreiheit von L_1, L_2 und L_3 indem Sie kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 und G_3 mit $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$, $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$ und $L_3 = \mathcal{L}(G_3)$ konstruieren.

- **(i)** $L_1 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } j = i + k\}$
- **(ii)** $L_2 := \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i, j \in \mathbb{N},\ i \leq j \leq 2 \cdot i\}$
- **(iii)** $L_3 := \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid w \neq w^R\}$

(b) Beweisen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter dem Reversal-Operator ^{R} abgeschlossen ist.