Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

14.05.2014

Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 21. Mai 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Der Lebensmittelkonzern BHL (Backwaren, Hustensaft und Lachsersatz) hat die Unterversorgung des Campus Bockenheim mit Backwaren erkannt und deswegen dort eine moderne BHL-Backstation aufgestellt. Diese Backstation kann unter anderem n-Schichten-Torten backen (eine solche Torte bestehen aus n Schichten). Hierzu mischt die Backstation immer den Teig für eine Schicht an und bäckt diese. Die Zutaten für eine Schicht werden *immer in der selben Reihenfolge* hinzugefügt: Erst das Mehl, dann Wasser, gefolgt von geheimen Geschmackspulver, Butter und zuletzt Zucker. Diese Zutaten werden von der Backstation mit `m`, `w`, `g`, `b` und `z` bezeichnet. Ein Buchstabe entspricht hierbei einer Portion der zugehörigen Zutat. Reginald, ein Studierender mit besonderer Vorliebe für reguläre Ausdrücke, ist besonders angetan von der Backstation, da die Eingabe für n-Schichten-Torten Wörtern über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{m}, \mathtt{w}, \mathtt{g}, \mathtt{b}, \mathtt{z}\}$ entspricht. Reginald hat folgende sechs Lieblingsrezepte für Schichten der Torte:

- Das Rezept `mmmwwgbbz`, welches einer Schicht aus 3 Portionen Mehl, 2 Portionen Wasser, 1 Portion geheimes Geschmackspulver, 2 Portionen Butter und 1 Portion Zucker entspricht,
- 3 Portionen Mehl, 1 Portion Wasser, 2 Portionen geheimes Geschmackspulver, 2 Portionen Butter und 1 Portion Zucker,
- `mmmgggbbz`, welches einer Schicht aus 3 Portionen Mehl, 0 Portionen Wasser, 3 Portionen geheimes Geschmackspulver, 2 Portionen Butter und 1 Portion Zucker entspricht,
- und die drei Rezepte, die den ersten drei Rezepten ohne die beiden Portionen Butter entsprechen.

Reginald hat dabei die BHL-Backrichtline beachtet, dass jedes Schicht-Rezept Mehl und Zucker enthalten muss. Somit würde bei Eingabe `mmmwwgbbzmmmgggbbz` die Backstation eine 2-Schichten-Torte backen, wobei die erste Schicht nach dem ersten Rezept und die zweite Schicht nach dem dritten Rezept gebacken wird.

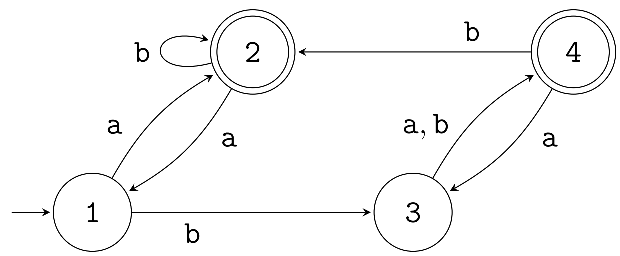
Für Unentschlossene bietet die Backstation sogar die Möglichkeit einen regulären Ausdruck als Eingabe zu verwenden. Die Backstation wählt dann ein beliebiges Wort aus der Sprache, die vom regulären Ausdruck beschrieben wird. Bekommt die Backstation $(\mathtt{mmmwwgbbz} \mid \mathtt{mmmgggbbz})^*$ als Eingabe bekommen, dann bäckt sie eine beliebige Torte aus $\mathcal{L}((\mathtt{mmmwwgbbz} \mid \mathtt{mmmgggbbz})^*)$. Also eine Torte mit einer zufälligen Anzahl von Schichten bestehend aus dem ersten und dem dritten Rezept. Sogar eine 0-Schichten-Torte wäre möglich, da $\varepsilon \in \mathcal{L}((\mathtt{mmmwwgbbz} \mid \mathtt{mmmgggbbz})^*)$.

Reginald kann sich für keine Zusammenstellung seiner Torte aus seinen Lieblingsrezepten entscheiden. Somit will er der Backstation die Entscheidung überlassen. Reginald will also einen regulären Ausdruck α entwerfen, so dass die Backstation eine n-Schichten-Torte mit beliebigen $n \in \mathbb{N}$ und einer beliebigen Reihenfolge der sechs möglichen Schichten (jede Schicht kann beliebig of vorkommen) herstellt. Da die Buchstabentasten (`m`, `w`, `g`, `b` und `z`) der Backstation schon sehr abgenutzt sind (die Klammertasten, $|$, *, $^+$ und ε sind noch nahezu unbenutzt), will Reginald hierzu einen regulären Ausdruck α erstellen, der so wenige Tastendrucke wie möglich auf Buchstabentasten erfordert.

Stellen Sie diesen regulären Ausdrucks α über Σ auf. Um möglichen Punkteverlust durch kleine Fehler zu reduzieren, können Sie auch erst einen langen regulären Ausdruck aufstellen und diesen dann Schrittweise zu dem von Reginald gewollten Ausdruck umformen.[1]

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Wandeln Sie den durch folgende Grafik gegeben DFA A in eine regulären Ausdruck α mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\alpha)$ um und dokumentieren Sie dabei nachvollziehbar Ihre Zwischenschritte:



Aufgabe 3: **($(6+6+6+6)+6 = 30$ Punkte)**

(a) Beweisen Sie, dass folgende Sprachen nicht regulär sind:

(i) $L_a := \{w \in \{ab, bc\}^* \mid |w|_a = |w|_c\}$

(ii) $L_b := \{a^n b^n c^m a^{2n} b^n d^m a^n e^{n+2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

(iii) $L_c := \{w \in a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ und } i = 3 \cdot j\}$

(iv) $L_d := \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid |w|_a = |w|_b + |w|_c \text{ oder } |w|_c \neq |w|_d\}$

(b) Die Operation double auf Sprachen sei wie folgt definiert:

$$\text{double}(L) := \{a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma, a_1 a_2 \cdots a_n \in L\}$$

Beweisen Sie: Die Klasse der regulären Sprachen ist unter double abgeschlossen.

Hinweise: Für Beweise mit Hilfe von Abschlusseigenschaften dürfen Sie alle Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen benutzen, die bisher in der Vorlesung oder vorangegangenen Übungsaufgaben bewiesen wurden. Außerdem dürfen Sie voraussetzen, dass $L_1 := \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ nicht regulär sind.

Aufgabe 4: **($5+5+5+5 = 20$ Punkte)**

Seien α, β und γ reguläre Ausdrücke. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Rechenregeln:

(a) $\mathcal{L}((\alpha^*)^*) = \mathcal{L}(\alpha^*)$

(b) $\mathcal{L}((\alpha^+ \cdot \alpha^+)^+) = \mathcal{L}(\alpha^+)$

(c) $\mathcal{L}(\alpha \mid (\beta \cdot \gamma)) = \mathcal{L}((\alpha \mid \beta) \cdot (\alpha \mid \gamma))$

(d) $\mathcal{L}(\alpha \cdot (\beta \mid \gamma)) = \mathcal{L}((\alpha \cdot \beta) \mid (\alpha \cdot \gamma))$

Hinweise: Beispiele für das Beweisen solcher Rechenregeln finden Sie im Skript zur Vorlesung.

---

[1]Der BHL-Backstationssupport hat einige Wochen später die Tasten * und $^+$ aus den Backstationen entfernt, da Reginald versehentlich eine 14141414-Schichten-Torte gebacken hat und diese Torte inzwischen den kompletten Campus Bockenheim unter sich begraben hat. Danke BHL, das könnte den Umzug beschleunigen!