Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme

07.05.2014

Dr. Dominik D. Freydenberger
Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 14. Mai 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Wilma Willkür betreibt eine lustige Losbude auf dem diesjährigen Dippemarkt. In der Lostrommel befinden sich anfangs immer einige Gewinnlose für biegbare Bleistifte (abgekürzt: `b`), wenige Gewinnlose für rosa Riesenplüschponys (abgekürzt: `r`), fast gar keine Gewinnlose für sprachgesteuerte Spielekonsolen (abgekürzt: `s`), sehr viele Gewinnlose für krassen Krimskrams (abgekürzt: `k`) und ein Haufen nutzlose Nieten (abgekürzt: `n`).

Wilma Willkür fasst die Folge gezogener Lose als ein Wort über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{b}, \mathtt{r}, \mathtt{s}, \mathtt{k}, \mathtt{n}\}$ auf. Da viele kaufwillige Kunden es auf einen bestimmten dieser populären Preise abgesehen haben und aufhören zu kaufen, wenn sich zu wenige passende Lose in der Lostrommel befinden, wirft Wilma Willkür hin und wieder alle Lose in die Lostrommel zurück. Dazu kontrolliert Wilma Willkür alle paar Loskäufe (der Abstand zwischen zwei Kontrollen ist relativ willkürlich) das entstandene Wort auf folgende drei Bedingungen:

- Es sind mindestens drei Gewinnlose für biegbare Bleistifte gezogen worden (das Wort enthält mindestens dreimal den Buchstaben `b`).
- Es sind mindestens zwei Gewinnlose für rosa Riesenplüschponys gezogen worden (das Wort enthält mindestens zweimal den Buchstaben `r`).
- Es ist mindestens ein Gewinnlos für eine sprachgesteuerte Spielekonsole gezogen worden (das Wort enthält mindestens einmal den Buchstaben `s`).

Wenn bei einer Kontrolle des Wortes *mindestens* eine dieser Bedingungen erfüllt wird, dann wirft Wilma Willkür alle Lose zurück in die Lostrommel.

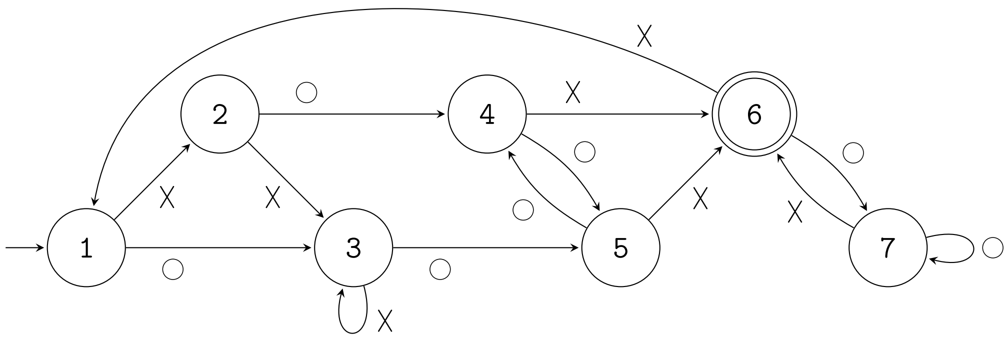
Ihrem Namen entsprechend ist Wilma Willkür natürlich eine Befürworterin von nichtdeterministischen Lösungen und möchte deshalb einen NFA A konstruieren, so dass $\mathcal{L}(A)$ genau die Wörter aus Σ^* enthält, die mindestens eine der drei obigen Bedingungen erfüllen.

Also sollen z. B. die Wörter `nnks`, `bnrbkkkrn` und `rnbrrssbb` zu $\mathcal{L}(A)$ gehören, aber `nnkk`, ε und `kbrnb` nicht. Außerdem sollte A_W möglichst wenige Zustände habe.

Auf der Rückseite finden Sie weitere Aufgaben.

Aufgabe 2: **(22 Punkte)**

Sei $A := (\{\bigcirc, \text{X}\}, \{\texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}\}, \delta, \texttt{1}, \{\texttt{6}\})$ ein DFA und δ durch folgende Grafik gegeben:



Geben Sie einen minimalen DFA A' mit $\mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(A)$ an. Die Bestimmungsmethode ist dabei Ihnen überlassen, sofern die Minimalität von A' ausreichend begründet ist und Ihre Zwischenschritte erkennbar sind.

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei $L := \{w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \mid w = x\texttt{ababba}y \text{ mit } x, y \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\}$.

(a) Konstruieren Sie einen NFA A_1 mit $\mathcal{L}(A_1) = L$ und möglichst wenigen Zuständen.

(b) Konstruieren Sie den minimalen DFA A_2 mit $\mathcal{L}(A_2) = L$. Sie müssen A_2 nicht algorithmisch aus A_1 konstruieren, sondern dürfen den minimalen DFA A_2 auch direkt aufstellen. (Wahrscheinlich ist dies auch deutlich angenehmer.) Sie müssen die Minimalität von A_2 nicht beweisen.

Aufgabe 4: **(14 + 14 = 28 Punkte)**

(a) Beweisen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Suffixbildung (dem Operator suffix) abschlossen ist.

(b) Das *Shuffle-Produkt* zweier Wörter $x, y \in \Sigma^*$ ist die Wortmenge

$$\text{shuffle}(x, y) := \{x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_n y_n \mid n \in \mathbb{N},\ x = x_1 \cdots x_n, y = y_1 \cdots y_n \\ \text{mit } x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \Sigma^*\}.$$

Zum Beispiel ist $\text{shuffle}(\texttt{ab}, \texttt{baa}) = \{\texttt{abbaa}, \texttt{ababa}, \texttt{abaab}, \texttt{babaa}, \texttt{baaba}, \texttt{baaab}\}$. Das Wort $\texttt{baaab} \in \text{shuffle}(\texttt{ab}, \texttt{baa})$ ergibt sich hierbei unter anderem auf folgende beiden Weisen:

1. $x_1 = \varepsilon, x_2 = \texttt{ab}, y_1 = \texttt{baa}, y_2 = \varepsilon$ und somit $x_1 x_1 y_2 y_2 = \varepsilon \cdot \texttt{baa} \cdot \texttt{ab} \cdot \varepsilon = \texttt{baaab}$,
2. $x_1 = \varepsilon, x_2 = \texttt{a}, x_3 = \texttt{b}, y_1 = \texttt{b}, y_2 = \texttt{aa}, y_3 = \epsilon$ und somit
   $x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 = \varepsilon \cdot \texttt{b} \cdot \texttt{a} \cdot \texttt{aa} \cdot \texttt{b} \cdot \varepsilon = \texttt{baaab}$.

Das *Shuffle-Produkt* zweier Sprachen L_1, L_2 sei nun wie folgt definiert:

$$\text{shuffle}(L_1, L_2) := \bigcup_{x \in L_1, y \in L_2} \text{shuffle}(x, y).$$

Zeigen Sie: Wenn L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $\text{shuffle}(L_1, L_2)$ regulär.

Hinweise: Nehmen Sie an, dass DFAs $A_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, q_{1,0}, F_1)$ und $A_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, q_{2,0}, F_2)$ mit $\mathcal{L}(A_1) = L_1$ und $\mathcal{L}(A_2) = L_2$ gegeben sind. Konstruieren Sie daraus einen NFA $A_3 = (\Sigma, Q_3, \delta_3, q_{3,0}, F_3)$ mit $\mathcal{L}(A_3) = \text{shuffle}(L_1, L_2)$ und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.
Für eine effiziente Konstruktion von A_3 erhält man $|Q_3| = |Q_1| \cdot |Q_2|$.