Goethe-Universität Frankfurt am Main 23.04.2014
Institut für Informatik Dr. Dominik D. Freydenberger
Theorie komplexer Systeme Dipl.-Inf. Joachim Bremer

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2014

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 30. April 2014, 14:14 Uhr*

Aufgabe 1: **($15 + 15 = 30$ Punkte)**

Nach jahrelangem Dienst bei der unheimlichen Gräfin D'Ismod hat sich der bucklige Butler Igor nach einem neuen Arbeitgeber umgesehen. Gefunden hat er eine Anstellung in einem düsteren Schloss auf der Spitze eines Berges beim Freiherrn zu Bergé. Dort war die Arbeit aber nicht minder hart. Anstatt den Weinkeller nach einer bestimmten Flasche zu durchsuchen, sind jetzt Essenszubereitung und die Parkettpflege des Ballsaals des Schlosses die Hauptaufgaben von Igor. Der Freiherr zu Bergé wird immer ernsthaft ungehalten, wenn seine Bediensteten eine Pause machen bevor alle Teilaufgaben der entsprechenden Hauptaufgabe vollständig erledigt sind. Igor darf somit direkt nachdem er das Essen gekocht hat noch keine Pause machen. Zuvor muss er noch das Essen servieren, dann abräumen und zuletzt noch das Geschirr reinigen. Igors Arbeitsreihenfolge ist somit **kochen, servieren, abräumen, reinigen** (abgekürzt: $\mathtt{k\,s\,a\,r}$). Ansonsten muss Igor sich noch um die Pflege des Ballsaals kümmern (Freiherr zu Bergé hat den Ballsaal zwar noch nie benutzt, aber er muss immer in perfektem Zustand sein, falls Gräfin D'Ismod überraschend zu Besuch kommt). Hierzu muss Igor das Parkett im Ballsaal erst **wischen**, dann **ölen** und zuletzt **polieren** (abgekürzt: $\mathtt{w\,ö\,p}$). Wenn Igor mit der Essenszubereitung oder den Arbeiten im Ballsaal fertig ist, wird er bald wieder mit der jeweiligen Aufgabe von vorne beginnen.

(a) Um immer zu wissen wann er eine Pause machen kann, stellt Igor zwei DFAs A_E und A_B (E für Essen und B für Ballsaal) für die beiden Sprachen L_E und L_B mit den Alphabeten $\Sigma_E := \{\mathtt{k}, \mathtt{s}, \mathtt{a}, \mathtt{r}\}$ und $\Sigma_B := \{\mathtt{w}, \text{ö}, \mathtt{p}\}$ auf. In seinem kleinen Notizbuch notiert sich Igor zwei Wörter, eines aus Σ_E^* und eines aus Σ_B^*. Diese Wörter verlängert Igor immer, wenn er eine weitere Teilaufgabe einer Hauptaufgabe erledigt hat. Igor will jeden der DFAs so konstruieren, dass der jeweilige DFA akzeptieren, wenn Igor die Reihenfolge der entsprechenden Teilaufgaben eingehalten hat und mit der Hauptaufgabe fertig ist (also zuletzt das Geschirr gereinigt bzw. das Parkett poliert hat). Konstruieren Sie für Igor diese beiden DFAs. Beachten Sie, dass Igor durchaus auch mehrfach für den Freiherrn zu Bergé Essen zubereiten muss und das Parkett im Ballsaal pflegen muss. Außerdem kann Igor auch eine Pause machen bevor er mit der Arbeit beginnt, wodurch ε in L_E und L_B enthalten ist.

(b) Eines Tages bemerkt der Freiherr zu Bergé, dass Igor immer wieder etwas in sein Notizbuch schreibt und lässt sich das Notizbuch zeigen. Erzürnt ruft der Freiherr zu Bergé: „Zwei DFAs! Du bist wohl nicht in der Lage deinen Aufgaben mit nur einem DFA und einem Wort zu beschreiben!“ Um nicht weiterem Spott vom Freiherrn zu Bergé ausgesetzt zu sein beginnt Igor mit der Konstruktion eines DFAs A_2 für die Sprache L_2 mit $\Sigma_2 := \Sigma_E \cup \Sigma_B$. Der DFA A_2 soll hierzu exakt die Wörter aus Σ_2^* akzeptiert, bei denen für beide Hauptaufgaben die korrekt Reihenfolge der Teilaufgaben eingehalten wurde und gerade beide Hauptaufgaben beendet wurden. Wie würde der DFA A_2 aussehen, wenn Sie ihn konstruieren würden? Beachten Sie dass Igor zwischen Teilaufgaben bei der Essenszubereitung und bei der Parkettpflege im Ballsaal hin- und herwechseln kann und somit z. B. die Wörter ε, `ksar`, `wöpwöp`, `ksarwöp`, `kswöarp` und `wökpsawröp` akzeptiert werden, aber die Wörter `kras`, `kswar` und `wksarpö` nicht.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Präfixbildung (dem Operator prefix) abschlossen ist.

Hinweise: Beschreiben Sie hierfür wie man aus einem DFA A einen DFA A_p mit $\mathcal{L}(A_p) = \text{prefix}(\mathcal{L}(A))$ konstruieren kann und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Aufgabe 3: **($10 + 15 = 25$ Punkte)**

(a) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\equiv_{L_1}$ für die Sprache $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = 3\}$ und beweisen Sie, dass dies alle Äquivalenzklassen für L_1 sind.

(b) Wie viele Äquivalenzklassen der Nerode-Relation $\equiv_{L_2}$ existieren für die Sprache $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$? Finden Sie geeignete Repräsentanten für jede Äquivalenzklasse und beschreiben Sie die zugehörige Wortmenge von jeder Äquivalenzklasse.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Beweisen Sie für $L = \{w \in \{ba\}^* \mid |w| \geq 42 \text{ und } |w| \neq 1337\}$, dass L eine reguläre Sprache ist.