Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 08.07.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis 24.07.2014

Aufgabe 1: **($10 + 20$ Punkte)**

(a) Sei $m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Geben Sie eine MLFP[<]-Formel $\varphi_m(x)$ an, die in einer endlichen geordneten Struktur besagt, dass der Rang von x ein Vielfaches von m ist.

(b) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:
Jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ ist MLFP-definierbar.

Hinweis: Für einen gegebenen deterministischen endlichen Automaten A mit Zustandsmenge $Q := \{0, \ldots, m-1\}$ wollen wir einen MLFP-Satz φ_A angeben, der ausdrückt, dass der Lauf von A auf einem Eingabewort w akzeptierend ist. Da es nicht ohne Weiteres möglich ist (im Gegensatz zum Beweis des Satzes von Büchi) jede Position von w mit dem Zustand zu markieren, den A an der Position erreicht, müssen wir uns ein anderes Vorgehen überlegen. Wir zerlegen ein Wort w in zusammenhängende Teilwörter der Länge m und ein Suffix der Länge $< m$ (falls $|w|$ nicht durch m teilbar ist). D.h. $w = w_1 \ldots w_\ell w_{\ell+1}$, wobei $\ell := \lfloor \frac{|w|}{m} \rfloor$ und $|w_i| = m$ für alle $i \leqslant \ell$. Wir markieren nun jedes der Teilwörter w_i mit dem Zustand, den A auf dem Präfix $w_1 \cdots w_{i-1}$ erreicht. D.h. wir definieren induktiv eine unäre Relation, die für jedes $i \leqslant \ell$ und $q \in Q$ aus dem Teilwort w_i genau dann die q-te Position enthält, wenn A bei Eingabe von $w_1 \cdots w_{i-1}$ den Zustand q erreicht. Mit Hilfe dieser Relation kann man nun leicht den gesuchten Satz φ_A konstruieren.

Aufgabe 2: **(20 Punkte)**

Zeigen Sie, dass jede LFP[σ]-Formel äquivalent zu einer LFP[σ]-Formel ist, in der für jede Teilformel der Form $[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\ \psi](\vec{t})$ gilt: ψ besitzt außer $\vec{x}$ keine weiteren freien Variablen erster Stufe.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(12 + 13 = 25 Punkte)**

Wir betrachten eine Variante des bekannten *Spiels des Lebens* von J.H. Conway, die auf gerichteten Graphen gespielt wird. Sei E ein zweistelliges und L ein einstelliges Relationssymbol und sei $\sigma := \{E, L\}$. Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ definieren wir eine Abbildung $F_{\mathfrak{A}} : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$, so dass $F_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = L^{\mathfrak{A}}$ und so dass für jede Menge $M \subseteq A$ und alle $a \in A$ genau dann gilt, dass $a \in F_{\mathfrak{A}}(M)$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $a \in M$ und es gibt genau zwei verschiedene $v \in M$ mit $(a, v) \in E^{\mathfrak{A}}$.
- Es gibt genau drei verschiedene Knoten $v \in M$, so dass $(a, v) \in E^{\mathfrak{A}}$.

Wir sagen, dass $\mathfrak{A}$ *ausstirbt*, wenn eine der Induktionsstufen von $F_{\mathfrak{A}}$ die leere Menge ist (d.h. es gibt ein $i \geqslant 0$, so dass $F^i_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = \emptyset$).

Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, die aussterben, ist PFP[σ]-definierbar in der Klasse FIN_σ aller endlichen σ-Strukturen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion $F_{\mathfrak{A}}$ hat für jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$ einen Fixpunkt.

Aufgabe 4: **(13 + 12 = 25 Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Jeden Σ-Baum t identifizieren wir mit der auf Blatt 1 definierten τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$.

(a) Geben Sie eine LFP[τ_Σ]-Formel $\varphi_{\mathrm{Ord}}(x, y)$ an, die in jedem Σ-Baum t eine lineare Ordnung definiert (d.h. $\varphi_{\mathrm{Ord}}(\mathfrak{A}_t)$ ist eine lineare Ordnung auf dem Universum von $\mathfrak{A}_t$).

(b) Zeigen Sie: LFP beschreibt die Komplexitätsklasse P auf der Klasse aller Σ-Bäume.