

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 03.07.2014

Aufgabe 1:

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.
- (b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär.
- (c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.
- (d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.
- (e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Aufgabe 2:

(12 + 13 = 25 Punkte)

- (a) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird von folgendem LFP[E]-Satz φ definiert?

$$\varphi := \forall x \left[\mathbf{lfp}_{P,x} \forall y \left(P(y) \vee \neg E(y, x) \right) \right](x).$$

- (b) Geben Sie einen LFP[E]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

Hinweis: Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 4.15, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur σ , jede LFP[σ]-Formel $\varphi(R, \vec{x})$, die positiv in R ist, und jede σ -Struktur \mathfrak{A} gilt: $F_{\varphi, \mathfrak{A}}$ ist monoton.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form $[\mathbf{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t})$ auf einstellige Relationen R beschränken.

Zeigen Sie, dass für jedes endliche Alphabet Σ und jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

Wenn L MLFP-definierbar ist, dann ist L auch regulär.