

# Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

## Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 03.07.2014

### Aufgabe 1:

(5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.
- (b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär.
- (c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.
- (d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.
- (e) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

### Aufgabe 2:

(12 + 13 = 25 Punkte)

- (a) Welche Klasse gerichteter endlicher Graphen wird von folgendem LFP[ $E$ ]-Satz  $\varphi$  definiert?

$$\varphi := \forall x \left[ \mathbf{lfp}_{P,x} \forall y \left( P(y) \vee \neg E(y, x) \right) \right](x).$$

- (b) Geben Sie einen LFP[ $E$ ]-Satz an, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die bipartit sind.

*Hinweis:* Ein ungerichteter Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

### Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Proposition 4.15, d.h. zeigen Sie, dass für jede Signatur  $\sigma$ , jede LFP[ $\sigma$ ]-Formel  $\varphi(R, \vec{x})$ , die positiv in  $R$  ist, und jede  $\sigma$ -Struktur  $\mathfrak{A}$  gilt:  $F_{\varphi, \mathfrak{A}}$  ist monoton.

### Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Wir erhalten die Logik MLFP („Monadische kleinste Fixpunktlogik“), indem wir in LFP-Formeln die Verwendung von Formeln der Form  $[\mathbf{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t})$  auf einstellige Relationen  $R$  beschränken.

Zeigen Sie, dass für jedes endliche Alphabet  $\Sigma$  und jede Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  gilt:

Wenn  $L$  MLFP-definierbar ist, dann ist  $L$  auch regulär.