Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt 12.06.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 26.06.2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei $p_1 < p_2 < \ldots$ eine Aufzählung der Primzahlen gemäß der natürlichen linearen Ordnung auf $\mathbb{N}$. Wir definieren einen abzählbar unendlichen ungerichteten Graphen $G := (\mathbb{N}, E)$ mit der folgenden Kantenmenge

$$E \ := \ \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : p_n \text{ teilt } m \text{ oder } p_m \text{ teilt } n\}.$$

Zeigen Sie, dass G isomorph zum Rado-Graphen ist.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Theorem 3.35, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im k-Pebble Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a})$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b})$ hat, wenn $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} (\mathfrak{B}, \vec{b})$ gilt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 3.37, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Sei $k \geqslant 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,m}$ für alle $\ell \geqslant 1$ und $m \geqslant 0$ mit $m \leqslant \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

Aufgabe 4: **(15 + 10 = 25 Punkte)**

Sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

(a) Zeigen Sie, dass Conn nicht $\mathrm{L}^2_{\infty\omega}[E]$-definierbar in UGraphs ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Conn ist $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}[E]$-definierbar in UGraphs.