Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

03.06.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis Dienstag, 24.06.2014

Aufgabe 1: **(15 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen G, so dass alle Zusammenhangskomponenten von G die gleiche Größe haben (d.h. aus derselben Anzahl von Knoten bestehen), nicht EMSO$[E]$-definierbar in der Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen ist.

Aufgabe 2: **($7+7+7+7+7 = 35$ Punkte)**

(a) Berechnen Sie die asymptotische Wahrscheinlichkeit $\mu(\mathrm{P} \mid \mathrm{UG})$ für die Klasse P aller planaren ungerichteten Graphen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

- **(i)** FO$[\sigma_{\{a,b\}}]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller Wortstrukturen $\mathfrak{A}_w$ mit $w \in \{a,b\}^+$.
- **(ii)** MSO$[<]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.
- **(iii)** FO$[<]$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen.
- **(iv)** Es gibt eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse S von ungerichteten Graphen, so dass FO$[E]$ kein 0-1-Gesetz bezüglich S besitzt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (a) von Lemma 3.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ gilt:

$$\mu(\mathrm{EA}_{\ell,F} \mid \textsc{All}(\sigma)) = 1.$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Teil (b) von Lemma 3.10 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jede endliche relationale Signatur σ, jedes $k \geqslant 1$ und alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, die jedes Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,F}$ mit $\ell \leqslant k$ und $F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ erfüllen, gilt: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen die gleichen FO$[\sigma]$-Sätze vom Quantorenrang $\leqslant k$.