Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22.05.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 05.06.2014

Bemerkung: In den Aufgaben 1 und 2 wird der Satz von Grädel („ESO-HORN beschreibt P auf $\text{FIN}_<$“) bewiesen. In den Aufgaben 3 und 4 wird bewiesen, dass auf *unären* Signaturen σ $\text{MSO}[\sigma]$ dieselbe Ausdrucksstärke wie $\text{FO}[\sigma]$ besitzt.

Aufgabe 1: **($13 + 12 = 25$ Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass das Problem

> HORN-SAT
>
> *Eingabe:* Eine Konjunktion α von aussagenlogischen Horn-Klauseln.
>
> *Frage:* Ist α erfüllbar?

deterministisch in Polynomialzeit gelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass das Problem $\text{Eval}_{\text{Fin}_<}(\Phi)$ für jeden ESO-HORN-Satz Φ in P liegt, d.h. es gibt einen deterministischen Algorithmus, der bei Eingabe einer endlichen geordneten Struktur $\mathfrak{A}$ in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \models \Phi$.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jede endliche, funktionenfreie Signatur $\sigma := \tau \cup \{<\}$ und jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse $\mathcal{C}$ von endlichen geordneten σ-Strukturen gilt: Falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die bei Eingabe einer endlichen geordneten σ-Struktur $\mathfrak{A}$ (repräsentiert durch $\text{enc}_{<_{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{A})$) in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, dann gibt es auch einen $\text{ESO-HORN}[\sigma]$-Satz Φ, so dass $\mathcal{C} = \text{Mod}_{\text{Fin}_<}(\Phi)$.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei σ eine funktionenfreie Signatur. Der Quantorenrang $\mathrm{qr}(\Phi) \in \mathbb{N}$ einer MSO[σ]-Formel Φ ist analog zum Quantorenrang einer FO[σ]-Formel definiert, wobei erststufige und zweitstufige Quantoren gleichermaßen gezählt werden. Beispielsweise ist $\mathrm{qr}(\Phi) = 3$ für die Formel $\Phi := \exists X \exists Y \Big(\forall x\, (X(x) \leftrightarrow \neg Y(x)) \wedge \exists x\, X(x)\Big)$.

(a) Definieren Sie Spielregeln und Gewinnbedingung eines *m-Runden* MSO-*Spiels*, so dass für alle $m \geqslant 0$ und alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt einen MSO[σ]-Satz Φ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\Phi) \leqslant m$, so dass $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \not\models \Phi$.

(ii) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

(b) Beweisen Sie die Richtung **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**.

Aufgabe 4: **(15 + 10 Punkte)**

(a) Für $k, \ell \geqslant 0$ sei $\sigma_{k,\ell}$ die Signatur mit k unären Relationssymbolen $P_1, \ldots, P_k$ und ℓ Konstantensymbolen $c_1, \ldots, c_\ell$. Für jede $\sigma_{k,\ell}$-Struktur $\mathfrak{A}$ sei die *Farbe* $c^{\mathfrak{A}}(a) \subseteq \sigma_{k,\ell}$ eines Elementes $a \in A$ definiert als

$$c^{\mathfrak{A}}(a) \;:=\; \{P_i : i \in \{1, \ldots, k\}, a \in P_i^{\mathfrak{A}}\} \;\cup\; \{c_j : j \in \{1, \ldots, \ell\}, a = c_j^{\mathfrak{A}}\}.$$

Für jede Farbe $f \subseteq \sigma_{k,\ell}$ sei

$$M_f^{\mathfrak{A}} \;:=\; \{a \in A : c^{\mathfrak{A}}(a) = f\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $k, \ell, m \geqslant 0$ und alle $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt: Wenn für alle Farben $f \subseteq \sigma_{k,\ell}$ gilt, dass

$$|M_f^{\mathfrak{A}}| = |M_f^{\mathfrak{B}}| \quad \text{oder} \quad |M_f^{\mathfrak{A}}|, |M_f^{\mathfrak{B}}| \geqslant 2^m,$$

dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

(b) Folgern Sie, dass es für jeden MSO[$\sigma_{k,\ell}$]-Satz einen auf der Klasse aller $\sigma_{k,\ell}$-Strukturen äquivalenten FO[$\sigma_{k,\ell}$]-Satz gibt.