Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

13.05.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 3

Zu bearbeiten bis Dienstag, den 03.06.2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet.
Zeigen Sie: Wenn $L \subseteq T_\Sigma$ eine MSO-definierbare Baumsprache ist, dann ist L regulär.

Aufgabe 2: **($15 + 10 = 25$ Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet.

(a) Zeigen Sie: Wenn $L \subseteq T_\Sigma$ eine reguläre Baumsprache ist, dann ist L MSO-definierbar.

(b) Die *monadische universelle Logik zweiter Stufe*, UMSO[σ] ist die Klasse aller MSO[σ]-Formeln der Form $\forall X_1 \ldots \forall X_d\ \varphi$, wobei gilt: $d \geqslant 0$, $X_1, \ldots, X_d$ sind Mengenvariablen und $\varphi \in \text{FO}[\sigma \cup \text{Var}_2]$. Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt UMSO-*definierbar*, wenn es einen UMSO[τ_Σ]-Satz φ gibt, so dass $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$.

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ ist genau dann EMSO-definierbar, wenn sie UMSO-definierbar ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

NE ist die Klasse aller Probleme $L \subseteq \{0,1\}^*$, für die es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt und eine nichtdeterministische 2^{kn}-zeitbeschränkte Turingmaschine, die L entscheidet.

Sei φ ein FO-Satz über einer relationalen Signatur σ. Das *Spektrum von* φ ist die Menge

$$\text{SPEC}(\varphi) := \{\, |A| \ : \ \mathfrak{A} \text{ ist eine endliche } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models \varphi \,\} \ \subseteq \ \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

Zeigen Sie, dass für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt:

$$\text{es gibt einen FO-Satz } \varphi \text{ mit } M = \text{SPEC}(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \{\mathit{Bin}(n) : n \in M\} \ \in \ \text{NE},$$

wobei $\mathit{Bin}(n)$ die Binärdarstellung von n ist, d.h. das Wort $\mathit{Bin}(n) := b_{\lfloor \log n \rfloor} \cdots b_0 \in \{0,1\}^+$ mit $n = \sum_{i=0}^{\lfloor \log n \rfloor} b_i 2^i$.

Hinweis: Für jeden FO-Satz φ über einer endlichen relationalen Signatur $\sigma := \{R_1, \ldots, R_\ell\}$ und für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt:

$$n \in \text{SPEC}(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \{1, \ldots, n\} \models \exists R_1 \ldots \exists R_\ell\ \varphi,$$

wobei wir $\{1, \ldots, n\}$ als Struktur über der leeren Signatur $\emptyset$ und $\exists R_1 \ldots \exists R_\ell\ \varphi$ als ESO[$\emptyset$]-Satz betrachten.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Für jede Komplexitätsklasse C bezeichne NP^C die Klasse aller Probleme L, für die eine polynomiell zeitbeschränkte nichtdeterministische Orakel-Turingmaschine[1] mit Orakel $O \in C$ existiert, die L entscheidet.

Sei $\Sigma_0^p := P$ und sei $\Sigma_i^p := \mathrm{NP}^{\Sigma_{i-1}^p}$, für $i \geqslant 1$. Insbesondere ist somit $\Sigma_1^p = \mathrm{NP}$.
Die *Polynomialzeit-Hierarchie* ist die Komplexitätsklasse $\mathrm{PH} := \bigcup_{i \geqslant 0} \Sigma_i^p$.

Zeigen Sie: SO beschreibt PH auf FIN.

Hinweis: Für den Beweis können Sie wie folgt vorgehen. Für jede Signatur σ sei $\Sigma_1^1[\sigma] := \mathrm{ESO}[\sigma]$ und sei $\Pi_1^1[\sigma]$ die Menge aller Formeln der Form $\forall R_1 \ldots \forall R_\ell\, \varphi$ mit $\ell \geqslant 0$ und $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma \cup \mathrm{Var}_2]$. Für $i \geqslant 2$ seien $\Sigma_i^1[\sigma]$ bzw. $\Pi_i^1[\sigma]$ die Mengen aller Formeln der Form $\exists R_1 \ldots \exists R_\ell\, \varphi$ bzw. $\forall R_1 \ldots \forall R_\ell\, \varphi$ mit $\ell \geqslant 0$ und $\varphi \in \Pi_{i-1}^1[\sigma]$ bzw. $\varphi \in \Sigma_{i-1}^1[\sigma]$.

Zeigen Sie per Induktion nach $i \geqslant 1$, dass gilt: Σ_i^1 beschreibt Σ_i^p auf FIN.

[1] siehe Kapitel 1.2.4 im Skript [S]