Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

06.05.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 2

Zu bearbeiten bis Donnerstag, den 15.05.2014

Aufgabe 1: **(13 + (6 + 6) = 25 Punkte)**

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen Sie Lemma 2.13 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass für jeden MSO[σ_Σ]-Satz φ gilt: φ^* beschreibt dieselbe Sprache wie φ.

(b) Beweisen Sie die Aussagen (b) und (d) aus Lemma 2.14 der Vorlesung, d.h. konstruieren Sie die gesuchten nichtdeterministischen endlichen Automaten $A_{le(X_i,X_j)}$ und $A_{symb_a(X_i)}$.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Diese Aufgabe bezieht sich auf den Begriff der Σ-*Bäume*, die auf Blatt 1 eingeführt wurden. Die *Höhe* eines Σ-Baumes ist die maximale Höhe seiner Blätter, d.h. die maximale Anzahl an Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu einem Blatt.

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen *gerader* Höhe besteht.

Zeigen Sie, dass L nicht MSO-definierbar ist.

Wie im Beweis von Satz 2.17 der Vorlesung („Hamiltonkreis ist nicht MSO-definierbar") können Sie hierfür eine logische Reduktion verwenden. Außerdem können Sie auf beliebige Tatsachen über reguläre Sprachen zurückgreifen, wie sie in einer einführenden Vorlesung zu dem Thema (z.B. der „Theoretischen Informatik 2") behandelt werden — z.B. dass die Sprache $\{c^n d^m : n < m, n, m \in \mathbb{N},\} \subseteq \{c, d\}^*$ nicht regulär ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Jeder endlichen Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ ordnen wir eine Zahl $n_M := \sum_{m \in M} 2^m$ zu. Die Abbildung mit $M \mapsto n_M$ ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und der Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{L}_i = (L_i, \leqslant^{\mathfrak{L}_i})$ die linear geordnete Struktur mit Universum $L_i = \{0, \ldots, i\}$ und der natürlichen linearen Ordnung auf L_i.

Konstruieren Sie eine MSO[$\leqslant$]-Formel $\varphi_+(X, Y, Z)$, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ und für alle endlichen Mengen $A, B, C \subseteq L_i$ gilt:

$$\mathfrak{L}_i \models \varphi_+[A, B, C] \iff n_A + n_B = n_C.$$

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass das folgende Problem entscheidbar ist.

> ENDLICHES ERFÜLLBARKEITSPROBLEM FÜR MSO[σ_Σ] AUF WORTEN
>
> *Eingabe:* Ein MSO[σ_Σ]-Satz φ.
>
> *Frage:* Gibt es ein $w \in \Sigma^+$, so dass $\mathfrak{A}_w \models \varphi$?

(b) Sei $+$ ein 3-stelliges Relationssymbol. Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, sei

$$+^n := \{(a, b, c) \in \{0, \dots, n\}^3 : a + b = c\}.$$

Zeigen Sie, dass das folgende Problem entscheidbar ist.

> ENTSCHEIDUNGSPROBLEM DER ENDLICHEN PRESBURGER-ARITHMETIK
>
> *Eingabe:* Ein FO[+]-Satz φ.
>
> *Frage:* Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $(\{0, \dots, n\}, +^n) \models \varphi$?

Hinweis: Sie können Dinge nutzen, die Sie in vorherigen (Teil-)Aufgaben gezeigt haben.