Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24.04.2014

Logik und Komplexität

Sommersemester 2014

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis zum 08.05.2014

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Für eine FO[σ]-Formel $\varphi(\bar{x})$ mit k freien Variablen (für $k \geqslant 1$) sei $\varphi(\mathfrak{A}) := \{\bar{a} \in A^k : \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})\}$, für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, dass es eine Signatur σ gibt, so dass das folgende Problem unentscheidbar ist.

> QUERY CONTAINMENT PROBLEM FÜR FO[σ]
>
> *Eingabe:* Eine Zahl $k \geqslant 1$ und FO[σ]-Formeln φ und ψ mit je k freien Variablen.
>
> *Frage:* Gilt für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$: $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq \psi(\mathfrak{A})$?

Aufgabe 2: **($6 + 6 + 6 + 7 = 25$ Punkte)**

(a) Was drückt der folgende Satz in einem ungerichteten Graphen aus?

$$\forall X \Big(\big(\exists x X(x) \ \wedge \ \exists x \neg X(x) \big) \rightarrow \ \exists x \exists y \left(X(x) \wedge E(x,y) \wedge \neg X(y) \right) \Big)$$

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Geben Sie einen MSO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G ein Baum ist.

(c) Geben Sie einen ESO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass G eine gerade Anzahl an Zusammenhangskomponenten enthält.

(d) Die *Bandbreite* $\mathrm{B}(G)$ eines Graphen G ist wie folgt definiert: für eine Bijektion $f : V(G) \to \{1, \ldots, |V(G)|\}$ sei $\mathrm{B}_f(G) := \max\{|f(u) - f(v)| : \{u,v\} \in E(G)\}$, und sei $\mathrm{B}(G) := \min_f \mathrm{B}_f(G)$ für alle derartigen Bijektionen f.
Geben Sie einen SO[σ_{Graph}]-Satz an, der in einem ungerichteten Graphen G ausdrückt, dass $\mathrm{B}(G) = 3$ ist.

Die nötigen Definitionen für die nachfolgenden Aufgaben finden Sie auf der Rückseite.

Aufgabe 3: **($12 + 13 = 25$ Punkte)**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in denen jedes Blatt gerade Höhe hat. Hierbei sei die *Höhe* eines Blattes b definiert als die Anzahl an Kanten auf einem gerichteten Pfad von der Wurzel zu b. Zeigen Sie:

(a) L ist MSO-definierbar.

(b) L ist regulär.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **($12 + 13 = 25$ Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Wenn $L_1 \subseteq T_\Sigma$ und $L_2 \subseteq T_\Sigma$ regulär sind, so ist auch $L_\cup := L_1 \cup L_2$ regulär.

(b) Wenn $L \subseteq T_\Sigma$ regulär ist, so ist auch $\overline{L} := \{t \in T_\Sigma : t \notin L\}$ regulär.

Definitionen

Binärbäume. Ein *gewurzelter Baum* G ist ein endlicher gerichteter Graph, der als ungerichteter Graph ein Baum ist (d.h. der symmetrische Abschluss von G ist ein Baum) und der einen *Wurzelknoten* enthält, von dem aus jeder andere Knoten von G über einen gerichteten Pfad erreichbar ist. Wenn jeder Knoten von G entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder besitzt, so heißt G *voll*. Ein voller Baum, dessen Kantenmenge E in $E_1 \dot\cup E_2$ partitioniert ist, so dass jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau ein Kind in E_1 (sein *erstes Kind*) und ein Kind in E_2 (sein *zweites Kind*) besitzt, heißt *geordneter Binärbaum*.

Σ-Bäume und Logik. Sei Σ ein endliches (nicht-leeres) Alphabet. Ein Σ-*Baum* $t = (B, \lambda)$ besteht aus einem geordneten Binärbaum B und einer Abbildung λ, die jedem Knoten v von B eine *Beschriftung* $\lambda(v) \in \Sigma$ zuordnet. Die Menge aller Σ-Bäume bezeichnen wir mit T_Σ. Eine *Baumsprache* ist eine Teilmenge $L \subseteq T_\Sigma$. Zur Repräsentation von Σ-Bäumen durch logische Strukturen nutzen wir die Signatur $\tau_\Sigma := \{E_1, E_2\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}$, wobei E_1 und E_2 2-stellige und alle P_a 1-stellige Relationssymbole sind. Ist t ein Σ-Baum mit Knotenmenge $V(t)$, Kantenmengen $E_1(t)$ und $E_2(t)$ und Beschriftungsfunktion λ, so repräsentieren wir t durch die τ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_t$ mit dem Universum $V(t)$ und den Relationen der $E_i^{\mathfrak{A}_t} := E_i(t)$ (für jedes $i \in \{1, 2\}$) und $P_a^{\mathfrak{A}_t} := \{v \in V(t) : \lambda(v) = a\}$ (für jedes $a \in \Sigma$). Ein SO$[\tau_\Sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Baumsprache L, wenn gilt: $L = \{t \in T_\Sigma : \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$. Eine Baumsprache $L \subseteq T_\Sigma$ heißt *MSO-definierbar*, wenn es einen MSO$[\tau_\Sigma]$-Satz gibt, der L beschreibt.

Baumautomaten und reguläre Baumsprachen. Analog zu den endlichen Automaten aus der Theorie formaler Sprachen, definieren wir Automaten, die Σ-Bäume verarbeiten. Ein (bottom-up) *Baumautomat* ist ein Tupel $A := (Q, \Sigma, \Delta, F)$, wobei Q eine endliche Menge, Σ ein endliches Alphabet, $F \subseteq Q$ und $\Delta \subseteq (Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma \times Q$ eine Relation ist. Q heißt *Zustandsmenge*, F heißt *Menge der akzeptierenden Zustände* und Δ heißt *Überführungsrelation* von A. Falls Δ der Graph einer Abbildung ist, die auf ganz $(Q^2 \cup \{\perp\}) \times \Sigma$ definiert ist, so heißt A *deterministisch*, ansonsten heißt A *nichtdeterministisch*. Intuitiv können wir uns vorstellen, dass A einen Σ-Baum t von den Blättern ausgehend verarbeitet und sich dabei auf die Wurzel zubewegt. Dabei baut A eine Funktion $f : V(t) \to Q$ auf, die als *Lauf von A auf t* bezeichnet wird. Wenn A deterministisch ist, ist f eindeutig bestimmt; ansonsten kann A viele Läufe auf t haben. Zunächst wird jedem Blatt v mit Beschriftung $a \in \Sigma$ ein Zustand $f(v) \in Q$ mit $(\perp, a, f(v)) \in \Delta$ zugewiesen. Nun bestimmt A rekursiv den Zustand $f(v)$ eines mit $a \in \Sigma$ gefärbten Knotens v, der kein Blatt ist, aus den Zuständen seines ersten und zweiten Kindes u_1 und u_2. Dazu weist A dem Knoten v einen Zustand $f(v) \in Q$ mit $(f(u_1), f(u_2), a, f(v)) \in \Delta$ zu. Wenn schließlich alle Knoten von t durch f mit Zuständen markiert sind, prüft A, ob der Zustand $f(w)$ an der Wurzel w von t zur Menge F gehört. Falls ja, so ist f ein *akzeptierender Lauf*, ansonsten ist f ein *verwerfender Lauf*. Ein Σ-Baum t wird von A genau dann *akzeptiert*, wenn es (mindestens) einen akzeptierenden Lauf von A auf t gibt. Die vom Baumautomat A *erkannte* Baumsprache $L(A)$ ist die Menge aller Σ-Bäume t, die von A akzeptiert werden. Eine Baumsprache L heißt *regulär*, wenn es einen Baumautomaten A gibt, der L erkennt.