Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. Juli 2012

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2012

Übungsblatt 11

Abgabe: *bis 12. Juli 2012 8:14*

Zur Unterstützung Ihrer Klausurvorbereitungen findet am Donnerstag, den 19.07.2012 von 8:15-11:00 Uhr im Magnus-Hörsaal eine Wiederholungsveranstaltung zur Vorlesung statt. Dort werden insbesondere beispielhaft Aufgaben aus älteren Klausuren besprochen.

Außerdem gibt es folgende Help-Desk-Termine:
Montag, den 16.07.12, 14:00-16:00 Uhr im Raum 117 (RMS 11-15): Alexander Adler
Dienstag, den 17.07.12, 12:00-14:00 Uhr im Raum 117 (RMS 11-15): Oguz Tuna
Mittwoch, den 18.07.12, 12:00-14:00 Uhr im Raum 117 (RMS 11-15): Christoph Burschka
Donnerstag, den 19.07.12, 12:00-14:00 Uhr im Raum 117 (RMS 11-15): Joachim Bremer

Denken Sie daran, dass Sie mindestens eine Aufgabe im Tutorium vorgerechnet haben müssen, um durch Übungspunkte Bonuspunkte in der Klausur angerechnet zu bekommen.

Aufgabe 1: **(23 Punkte)**

Geben Sie für die folgende Sprache $L_1 \subseteq \{a, b, \#\}$ eine Turingmaschine an, die die Sprache entscheidet:

$$L_1 := \{w\#w : w \in \{a, b\}^*\}.$$

Aufgabe 2: **($9 + 9 + 9 = 27$ Punkte)**

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Sprachen L_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$, ob (i) L_i entscheidbar ist, (ii) L_i oder $\overline{L_i}$ semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar ist oder (iii) weder L_i noch $\overline{L_i}$ semi-entscheidbar ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $L_1 := \{\langle T\rangle w : \text{Die TM } T \text{ erreicht auf Eingabe } w \text{ Zustand 2 mindestens einmal}\} \subseteq \Sigma^*$.

(b) $L_2 := \{\langle T\rangle w : \text{Die TM } T \text{ erreicht auf Eingabe } w \text{ Zustand 2 unendlich oft}\} \subseteq \Sigma^*$.

(c) $L_3 := \{\langle T\rangle w : \text{Die TM } T \text{ erreicht auf Eingabe } w \text{ Zustand 2 unendlich oft und verändert ihren Bandinhalt nie}\} \subseteq \Sigma^*$.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{0, 1\}$. Beweisen Sie, dass die folgende Sprache unentscheidbar ist:

$$L := \{\langle T_1\rangle\langle T_2\rangle \ : \ T_1, T_2 \text{ sind TM, die die gleiche partielle Funktion berechnen } \} \subseteq \Sigma^*.$$

Aufgabe 4: **(30 Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Das *modifizierte Postsche Korrespondenzproblem* MPKP_Σ ist das wie folgt definierte Entscheidungsproblem:

> **Gegeben:** Eine endliche Folge von Wortpaaren
>
> $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$$
>
> mit $k \geq 1$ und $x_i, y_i \in \Sigma^*$, für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
>
> **Frage:** Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i_1 = 1$ und
>
> $$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \;=\; y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}.$$

Reduzieren Sie das Problem MPKP_Σ auf das *Postsche Korrespondenzproblem* $PKP_{\Sigma'}$, für $\Sigma' := \Sigma \cup \{\#, \$\}$, wobei $\#, \$ \notin \Sigma$.

Das *Postsche Korrespondenzproblem* $\mathrm{PKP}_{\Sigma'}$ ist das wie folgt definierte Entscheidungsproblem:

> **Gegeben:** Eine endliche Folge von Wortpaaren
>
> $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)$$
>
> mit $k \geq 1$ und $x_i, y_i \in (\Sigma')^*$, für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.
>
> **Frage:** Gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$ mit
>
> $$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \;=\; y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}.$$

Hinweis: Ein Beweis findet sich in praktisch jedem Lehrbuch zum Thema Berechenbarkeit.