Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. Juni 2012

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2012

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 5. Juli 2012 8:14*

Aufgabe 1: **($12 + 12 = 24$ Punkte)**

Sei $G := (\Sigma, V, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik mit $\Sigma := \{a, b, c, d\}$, $V := \{S, A, B, C, D\}$ und folgenden Produktionen P:

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid AC \ , \\
A &\to CB \mid a \ , \\
B &\to CD \mid b \ , \\
C &\to AC \mid c \ , \\
D &\to d
\end{aligned}
$$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um zu entscheiden, ob die folgenden Wörter zu $L(G)$ gehören:

(a) $aabcbc$,

(b) $cbcbcd$.

Geben Sie jeweils alle Mengen $V_{i,j}$ an, die bei der Ausführung des CYK-Algorithmus berechnet werden.

Aufgabe 2: **($6 + (11 + 11) = 28$ Punkte)**

(a) Sei Σ ein endliches Alphabet und sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine rekursiv aufzählbare Menge. Zeigen Sie, dass $L \subseteq \Sigma^*$ semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Entscheidungsprobleme semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind. Hierbei sei Σ das ASCII-Alphabet, Programme seien gegeben als Wörter über Σ, und Eingaben für Programme seien ebenfalls Wörter über Σ.

(i) Das spezielle Halteproblem
Eingabe: Ein Programm P.
Ausgabe: "ja", falls P bei Eingabe P hält; ansonsten "nein".

(ii) Das Halteproblem bei leerer Eingabe
Eingabe: Ein Programm P.
Ausgabe: "ja", falls P bei Eingabe des leeren Wortes hält; ansonsten "nein".

Aufgabe 3: **($8 + 8 + 8 = 24$ Punkte)**

Zeigen Sie: Es gibt keinen Algorithmus, der bei Eingabe eines Programms P entscheidet,

(a) ob die von P berechnete Funktion die charakteristische Funktion χ_L einer regulären Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ ist. (Zur Erinnerung: Für eine Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\chi_L : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die Funktion, so dass für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt: $\chi_L(w) = 1$, falls $w \in L$, und $\chi_L(w) = 0$ sonst).

(b) ob P die Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ berechnet, so dass für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt: $f(w) = 1^{|w|}$.

(c) ob P eine konstante Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ berechnet, d.h. eine Funktion f, für die es ein Wort $c \in \{0,1\}^*$ gibt, so dass für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt: $f(w) = c$.

Sie können für Ihren Beweis den Satz von Rice verwenden.

Aufgabe 4: **($(4 + 4) + (4 + 4) + (4 + 4) = 24$ Punkte)**

Sei Σ ein endliches Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Abschlusseigenschaften jeweils für die Klasse aller entscheidbaren Sprachen über dem Alphabet Σ und die Klasse aller semi-entscheidbaren Sprachen über dem Alphabet Σ:

(a) Wenn $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) sind, so ist auch $L_1 \cap L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

(b) Wenn $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) sind, so ist auch $L_1 \cup L_2 \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

(c) Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, so ist auch $\bar{L} \subseteq \Sigma^*$ entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).