Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

31. Mai 2012

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2012

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 14. Juni 2012 8:14*

Aufgabe 1: **(17 Punkte)**

Sei die Grammatik G zur Erzeugung von if-then-else Anweisungen durch folgende Produktionen gegeben:

$$S \rightarrow \textit{anweisung} \mid \textbf{if } \textit{bedingung} \textbf{ then } S \mid \textbf{if } \textit{bedingung} \textbf{ then } S \textbf{ else } S\ ,$$

wobei *anweisung*, *bedingung*, **if**, **then** und **else** Terminale sind.

Entwerfen Sie eine *eindeutige* Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$. Hierzu wird G' mehr Variablen als G besitzen müssen. Begründen Sie, weshalb G' eindeutig ist.

Aufgabe 2: **($6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ Punkte)**

Unter welchen der folgenden Operationen sind die kontextfreien Sprachen abgeschlossen? (Ist L immer kontextfrei, wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind?) Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) *Vereinigung* $L := L_1 \cup L_2$

(b) *Schnitt* $L := L_1 \cap L_2$

(c) *Komplement* $L := \bar{L}_1$

(d) *Homomorphismus* $L := h(L_1)$, wobei h ein Homomorphismus ist

(e) *Umkehrung* $L := L_1^R$

Aufgabe 3: **($(7 + 7) + 9 = 23$ Punkte)**

(a) Beweisen oder widerlegen Sie für die Sprachen L_1 und L_2, ob diese kontextfrei sind. Wenn die Sprache kontextfrei ist, dann konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache. Ansonsten benutzen Sie das Pumping-Lemma.

  (i) $L_1 := \{a^i b^j a^j b^i : i, j \in \mathbb{N}\}$

  (ii) $L_2 := \{a^i b^j a^i b^j : i, j \in \mathbb{N}\}$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Ogden's Lemma, dass $L_3 := \{a^i b^i c^j : i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ nicht kontextfrei ist. Benutzen Sie hierfür das Wort $a^n b^n c^{n+n!} \in L_3$, wobei n die Pumpingkonstante ist. Warum brauchen Sie für diese Sprache Ogden's Lemma und können nicht das Pumping-Lemma anwenden (selbst wenn ein anderes Wort aus L_3 genommen wird)?

Aufgabe 4: **($15 + 15 = 30$ Punkte)**

Definition: Eine Grammatik ist in *Chomsky-Normalform*, wenn alle Produktionen die Form

$$A \to BC \qquad A \to a$$

besitzen (für $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$).

Satz: Sei L kontextfrei mit $\epsilon \notin L$. Dann gibt es eine Grammatik G in Chomsky-Normalform mit $L = L(G)$.

Unter anderem im Skript zur Vorlesung „Formale Sprachen und Berechenbarkeit“ von Prof. Dr. Schnitger ist eine Methode beschrieben, wie eine kontextfreie Grammatik in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform umgeformt werden kann.

(a) Beschreiben Sie mit eigenen Worten diese Methode. Wenn Sie eine andere Quelle als das Skript von Prof. Dr. Schnitger benutzen, dann geben Sie die Quelle an.

(b) Wandeln Sie unten stehende Grammatik, inklusive Angabe von Zwischenergebnissen in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform um. Wenn Sie das Verfahren aus dem Skript von Prof. Dr. Schnitger benutzen reichen als Zwischenergebniss die Ergebnisse jeweils nach „Schritt 1“, „Schritt 2“, „Schritt 3“, „Schritt 4.1“ und „Schritt 4.2“.

$G := (\Sigma, V, S, P)$ mit $\Sigma := \{a, b\}$, $V = \{S, A, B, C\}$ und

$$\begin{aligned} P := \{ & S \to ABBB, \\ & S \to A, \\ & A \to a, \\ & A \to Aa, \\ & B \to bBC, \\ & B \to bbb, \\ & B \to C, \\ & C \to \epsilon, \\ & C \to aCb\}. \end{aligned}$$