Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. Mai 2012

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2012

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 24. Mai 2012 8:14*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beschreiben Sie einen Algorithmus, der einen gegebenen ϵ-NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ in einen äquivalenten NFA ohne ϵ-Übergänge mit gleicher Zustandszahl umformt. Bestimmen Sie auch die Laufzeit Ihres Algorithmus. Um die maximale Punktezahl bei dieser Aufgabe zu erreichen, sollte Ihr Algorithmus Laufzeit $\mathcal{O}(|Q| \cdot |\delta|)$ besitzen, wobei

$$|\delta| := \sum_{\substack{q \in Q, \\ a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}}} |\delta(q, a)| \, .$$

Aufgabe 2: $\mathbf{((3+3+3+3)+(7+5+3)+4=31}$ **Punkte)**

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Sprache $L := \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist. Zeigen Sie für die Sprachen

$$L_1 := \{a^* cw : w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a = |w|_b\} \subseteq \{a,b,c\}^*,$$
$$L_2 := \{ab^{i_1} ab^{i_2} \cdots ab^{i_n} : n \in \mathbb{N}, (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ es gibt } 1 \le j \le n, \text{ s.d. } i_j \ne j\} \subseteq \{a,b\}^*,$$

dass diese auch nicht regulär sind, indem Sie mit Hilfe von Abschlusseigenschaften der Klasse der regulären Sprachen aus der Sprache L_1 bzw. L_2 die Sprache L bilden. Sie können hierbei mit folgenden Abschlusseigenschaften auskommen: Homomorphismus, Inverser Homomorphismus, Vereinigung mit regulären Sprachen, Schnitt mit regulären Sprachen, Komplementbildung. Für die Beweise sind folgende Zwischenschritte zu empfehlen:

(a) Für L_1 von

- **(i)** $L_1 = \{a^* cw : w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a = |w|_b\} \subseteq \{a,b,c\}^*$ mit exakt einer Abschlusseigenschaft zu
- **(ii)** $L_1' = \{\{a,d\}^* cw : w \in \{a,b,d\}^* \text{ und } |w|_a + |w|_d = |w|_b\} \subseteq \{a,b,c,d\}^*$ mit exakt einer Abschlusseigenschaft zu
- **(iii)** $L_1'' = \{d^* cw : w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a = |w|_b\} \subseteq \{a,b,c,d\}^*$ mit exakt einer Abschlusseigenschaft zu
- **(iv)** $L_1''' = \{w : w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a = |w|_b\} \subseteq \{a,b\}^*$ mit exakt einer Abschlusseigenschaft zu
- **(v)** $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Für L_2 von

(i) $L_2 = \{ab^{i_1}ab^{i_2}\cdots ab^{i_n} : n \in \mathbb{N}, (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n,$ es gibt $1 \leq j \leq n,$ s.d. $i_j \neq j\} \subseteq \{a,b\}^*$ mit einer oder mehreren Abschlusseigenschaften zu

(ii) $L_2' = \{ab^{i_1}ab^{i_2}\cdots ab^{i_n} : n \in \mathbb{N}, (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n,$ für alle $1 \leq j \leq n$ gilt $i_j = j\} \subseteq \{a,b\}^*$ mit einer oder mehreren Abschlusseigenschaften zu

(iii) $L_2'' = \{ac^{i_1}\cdots ac^{i_{n-1}}ab^{i_n} : n \in \mathbb{N}, (i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}^n,$ für alle $1 \leq j \leq n$ gilt $i_j = j\} \subseteq \{a,b,c\}^*$ mit einer oder mehreren Abschlusseigenschaften zu

(iv) $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$.

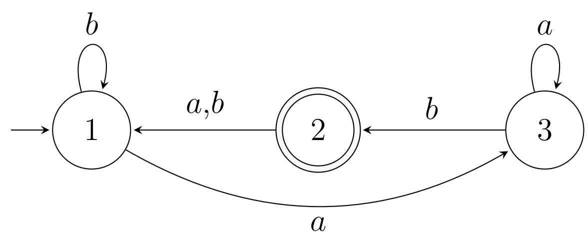
Beachten Sie: Diese Aufgabe soll **nicht** mit Hilfe des Pumping-Lemmas oder des Satzes von Myhill-Nerode gelöst werden, sondern durch die Benutzung von Abschlusseigenschaften.

(c) Erläutern Sie, warum die in dieser Aufgabe benutzte Methode tatsächlich beweist, dass L_1 und L_2 nicht regulär sind.

Aufgabe 3: **(7 + 10 + 10 = 27 Punkte)**

(a) Konstruieren Sie für die Sprache L, die durch den regulären Ausdruck $(a|\epsilon)(ba)^*(c^*a|bc)^*$ gegeben ist, einen ϵ-NFA A mit $L(A) = L$.

(b) Sei der DFA D über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ durch folgende Grafik gegeben:



Bestimmen Sie inklusive der Zwischenschritte (wie in der Vorlesung beschrieben) reguläre Ausdrücke für die Wortmengen, mit welchen man von 2 zu 3 gelangt bzw. von 3 zu 1 gelangt, wobei auf dem Weg nur der Zustand 1 (beliebig oft) besucht wird. Vereinfachen Sie die regulären Ausdrücke, wenn dies möglich ist.

(c) Bei der Bildung eines regulären Ausdrucks aus einem endlichen Automaten A mit drei Zuständen, welche bereits in $1, 2$ und 3 umbenannt wurden, wobei 1 der Startzustand ist und $2, 3$ akzeptierende Zustände sind, sind bereits folgende Teile berechnet worden:

$$L^2_{1,1} = b^*(aab^*)^* \qquad L^2_{1,2} = b^*a(ab^*a)^* \qquad L^2_{1,3} = b^*a(ab^*a)^*b$$
$$L^2_{3,2} = b^*ba(ab^*a)^* \qquad L^2_{3,3} = \epsilon|a|(b^*ba(ab^*a)^*b)$$

Führen Sie die restliche Konstruktion eines regulären Ausdrucks für $L(A)$ durch.

Aufgabe 4: **(17 Punkte)**

Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Wir definieren nun folgende Operation:

$$cycle(L) := \{xy : x, y \in \Sigma^* \text{ und } yx \in L\}$$

Zeigen Sie, dass $cycle(L)$ ebenfalls regulär ist.

Hinweis: Sie können aus einem DFA $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(D) = L$ einen ϵ-NFA N mit $L(N) = cycle(L)$ und $2 \cdot |Q|^2 + 1$ Zuständen konstruieren.