Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Mai 2012

Theoretische Informatik 2

Sommersemester 2012

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 10. Mai 2012 8:14*

Definition ($h(L), h^{-1}(L)$, Homomorphismus):
Seien Σ, Γ endliche Alphabete. Sei $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ eine Abbildung. Wir definieren die folgenden Sprachen:

$$\begin{aligned} h(L) &:= \{h(u) : u \in L\} \subseteq \Gamma^*, && \text{für jede Sprache } L \subseteq \Sigma^*, \\ h^{-1}(L) &:= \{u \in \Sigma^* : h(u) \in L\} \subseteq \Sigma^*, && \text{für jede Sprache } L \subseteq \Gamma^*. \end{aligned}$$

Für jedes $w \in \Gamma^*$ sei $h^{-1}(w) := h^{-1}(\{w\}) = \{u \in \Sigma^* : h(u) = w\}$.

Die Abbildung h heißt *Homomorphismus*, wenn für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$ gilt, dass $h(uv) = h(u)\,h(v)$. Beachten Sie, dass h in diesem Fall vollständig durch die Abbildung $a \mapsto h(a)$, für alle $a \in \Sigma$, festgelegt ist, und $h(a_1 \cdots a_n) = h(a_1) \cdots h(a_n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$.

Aufgabe 1: ((2 + 7) + 7 + 7 = 23 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Gamma = \{0, 1\}$.

(a) Sei $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus mit $h(a) = 001$, $h(b) = 0$ und $h(c) = 1$.

- **(i)** Geben Sie $h^{-1}(00101)$ an.
- **(ii)** Für welche Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt $h^{-1}(h(w)) = \{w\}$?

(b) Geben Sie einen Homomorphismus $g : \Sigma^* \to \Gamma^*$ an, so dass für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt $g^{-1}(g(w)) = \{w\}$.

(c) Geben Sie einen Homomorphismus $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ an, so dass $f^{-1}(f(w)) = \{w\}$ nur für das leere Wort ϵ gilt.

Aufgabe 2: (9 + 9 + 9 = 27 Punkte)

(a) Seien Σ, Γ endliche Alphabete. Sei $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- **(i)** Die Klasse aller regulären Sprachen ist *unter Homomorphismen abgeschlossen*, d.h. wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, so ist auch $h(L) \subseteq \Gamma^*$ regulär.
- **(ii)** Die Klasse aller regulären Sprachen ist *unter inversen Homomorphismen abgeschlossen*, d.h. wenn $L \subseteq \Gamma^*$ regulär ist, so ist auch $h^{-1}(L) \subseteq \Sigma^*$ regulär.

(b) Sei $R : \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine Abbildung, so dass $R(w) := a_n \cdots a_1$, für alle $w := a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ mit $n = |w|$. Statt $R(w)$ und $R(L)$ schreiben wir auch w^R und L^R.

Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen *unter Umkehrungen abgeschlossen* sind, dass also gilt: wenn $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, so ist auch L^R regulär.

Aufgabe 3: **($9+9+9=27$ Punkte)**

Geben Sie möglichst kurze und elegante Beweise dafür an, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind. Wählen Sie hierfür adäquate Beweismethoden (z.B. Pumping-Lemma, Satz von Myhill-Nerode, Abschlusseigenschaften der Klasse aller regulären Sprachen) aus.

(a) $L_1 \;:=\; \{a^i c^{n-i} b^j d^{n-j} : n \in \mathbb{N},\, 1 \leq i, j \leq n\} \subseteq \{a, b, c, d\}^*$,

(b) $L_2 \;:=\; \Big(\{(aab)^n(abb)^n : n \in \mathbb{N}\} \;\cup\; \{a, b\}^*\{aaa, aabb, bbb\}\{a, b\}^*\Big) \subseteq \{a, b\}^*$,

(c) $L_3 \;:=\; \{ab^{i_1}ab^{i_2}\cdots ab^{i_n} : n \in \mathbb{N}, (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n,\ \text{es gibt } 1 \leq j \leq n,\ \text{s.d. } i_j \neq j\} \subseteq \{a, b\}^*$.

Aufgabe 4: **($8+15=23$ Punkte)**

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Sei die folgende Sprache über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ gegeben:

$$L_k \;:=\; \{a^i b^i c^i : 0 \leq i < k\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen (nicht vollständigen) DFA mit $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ Zuständen, der L_k akzeptiert.

(b) Finden Sie eine möglichst große Zahl z_k, für die Sie zeigen können, dass jeder NFA, der L_k akzeptiert, mindestens z_k Zustände hat.

Hinweis: Man kann dies für $z_k = \frac{k(k+1)}{2}$ zeigen. Sie bekommen aber auch Punkte für Ihre Lösung, wenn Sie den Beweis nur für eine kleinere Zahl, die hinreichend nah an $\frac{k(k+1)}{2}$ liegt, führen können.