Goethe-Universität Frankfurt am Main Institut für Informatik Theorie Komplexer Systeme Dr. Mariano Zelke

## Datenstrukturen

Sommersemester 2012

## Übungsblatt 1

Abgabe: bis 24. April 2012, 8.15 Uhr (vor der Vorlesung oder in Raum RM 11-15/113)

Bitte achten Sie darauf, dass Sie auf der Abgabe Ihrer Lösung Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Übungsgruppe** angeben. Fehlt eine dieser Angaben, müssen Sie mit **Punktabzug** rechnen. Mehrseitige Abgaben müssen zusammengeheftet werden.

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Es seien die folgenden drei Funktionen gegeben:

$$f_1: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } f_1(n) = 4$$
  
 $f_2: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } f_2(n) = 2n + 2$   
 $f_3: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ mit } f_3(n) = n^2 - 4n + 4$ 

- (a) Für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$  schreiben wir  $f \leq g$ , falls  $f(n) \leq g(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Entscheiden Sie für jedes Paar  $f_i, f_j$  mit i < j von oben angegebenen Funktionen, ob  $f_i \leq f_j$  gilt und begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$  schreiben wir  $f \triangleleft g$ , falls es eine reelle Zahl c > 0 gibt mit  $f(n) \leq c \cdot g(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Entscheiden Sie für jedes Paar  $f_i, f_j$  mit i < j von oben angegebenen Funktionen, ob  $f_i \triangleleft f_j$  gilt. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie ein c > 0 angeben, so dass  $f_i(n) \leq c \cdot f_j(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt oder argumentieren, dass ein solches c nicht existiert.
- (c) Entscheiden Sie für jedes Paar  $f_i, f_j$  mit i < j von oben angegebenen Funktionen, ob  $f_i = \mathcal{O}(f_j)$  gilt. Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie ein c > 0 und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  angeben, so dass  $f_i(n) \leq c \cdot f_j(n)$  für alle  $n \geq n_0$  gilt oder argumentieren, dass solche c und  $n_0$  nicht existieren.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Bestimmen Sie für jedes der folgenden Paare von Funktionen f und g welche der Beziehungen  $f = \mathcal{O}(g), f = o(g), f = \Omega(g), f = \omega(g)$  und  $f = \Theta(g)$  gelten. Geben Sie jeweils (mit kurzer Begründung) jede geltende Beziehung an; Beziehungen, die jeweils nicht gelten, brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

(a) 
$$f(n) = n^3$$
,  $g(n) = \frac{1}{2}n^3 - 3n^2 + n$ 

**(b)** 
$$f(n) = \log_3(n^4), \quad g(n) = \log_9 \sqrt{n}$$

(c)  $f(n) = \text{Anzahl der Teilmengen von } \{1, \dots, n\},\$  $g(n) = \text{Anzahl der Permutationen von } \{1, \dots, n\}$ 

(d) 
$$f(n) = 3n^4$$
,  $g(n) = \begin{cases} n^4 & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist,} \\ n^3 & \text{sonst.} \end{cases}$ 

(e) 
$$f(n) = n$$
,  $g(n) = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}$ 

(f) 
$$f(n) = \frac{\log_2 n}{\log_8 n}$$
,  $g(n) = \sum_{i=0}^n (1/3)^i$ 

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Es seien  $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$  Funktionen, die Laufzeiten bestimmen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Aus 
$$f_1 = \mathcal{O}(g_1)$$
 und  $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$  folgt  $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1 + g_2)$ .

(b) Aus 
$$f_1 = \mathcal{O}(g_1)$$
 und  $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$  folgt  $f_1 \cdot f_2 = \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ .

(c) Aus 
$$f = \Theta(g)$$
 folgt  $3^f = \Theta(3^g)$ .

(d) Aus 
$$f = o(g)$$
 folgt  $f = \mathcal{O}(g)$ .

(e) Aus 
$$f = \mathcal{O}(g)$$
 folgt  $f = o(g)$ .

(f) Es gilt stets  $f(n) = \Theta(f(2n))$ .

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Es sei der folgende Algorithmus A für eine ganzzahlige Eingabe n gegeben:

## Algorithmus A

var 
$$sum = 0$$
  
for  $(i = 1; i \le n; i + +)$ {  
for  $(j = 1; j \le f(i); j + +)$ {  
 $sum = sum + 1;$   
}

Welchen Wert hat die Variable sum an Ende der Berechnung, wenn gilt

(a) 
$$f(i) = 5$$

**(b)** 
$$f(i) = n$$

(c) 
$$f(i) = 2n - i$$

(d) 
$$f(i) = 2^i - 1$$

(e)  $f(i) = n/(2^i)$  Für diese Teilaufgabe können Sie annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist.