Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 07.06.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 8

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 16.06.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Ein *Term* über den Eingabevariablen $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ und ℓ weiteren Variablen ist ein Ausdruck der Form z, für ein $z \in \{\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}, \neg\mathbf{x_1} \ldots \neg\mathbf{x_n}, \mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_\ell}, \neg\mathbf{y_1}, \ldots, \neg\mathbf{y_\ell}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, oder der Form $z \star z'$, wobei $\star \in \{\wedge, \vee\}$ und $z, z' \in \{\mathbf{x_1} \ldots \mathbf{x_n}, \mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_\ell}\}$.
Ein ℓ–zeiliges *Boolesches Straight–Line–Programm* P mit den Eingabevariablen $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ ist eine Folge $s_1, \ldots, s_\ell$, so dass s_i für alle $i \in [\ell]$ ein Ausdruck der Form $y_i = t_i$ ist, wobei t_i ein Term über den Eingabevariablen $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ und $i-1$ weiteren Variablen ist. Sei $|P| := \ell + n$ die *Größe* von P.
Sei $x := x_1 \cdots x_n \in \{0,1\}^n$. Bei Eingabe von x berechnet P auf die naheliegende Art eine Folge von Werten $y_1, \ldots, y_\ell$ mit $y_i \in \{0,1\}$ (für alle $i \in [\ell]$) für die Variablen $\mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_\ell}$. Präzise geschieht dies wie folgt: Um y_i zu bestimmen, gehen wir davon aus, dass y_j für alle $j < i$ bereits bekannt ist. Sei $y_i := [\![t_i]\!]$, wobei $[\![t]\!]$ für einen Term t über den Eingabevariablen $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}$ und $i-1$ weiteren Variablen folgendermaßen definiert ist:

- $[\![\mathbf{x_i}]\!] := x_i$ und $[\![\mathbf{y_j}]\!] := y_j$, für alle $i \in [n]$ und $j \in [i-1]$,
- $[\![\mathbf{0}]\!] := 0$ und $[\![\mathbf{1}]\!] := 1$,
- $[\![\neg z]\!] := \big|[\![z]\!] - 1\big|$, für $z \in \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}, \mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_{i-1}}\}$,
- $[\![z \wedge z']\!] := [\![z]\!] \cdot [\![z']\!]$ und
  $[\![z \vee z']\!] := \min\big\{[\![z]\!] + [\![z']\!], 1\big\}$, für $z, z' \in \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}, \mathbf{y_1}, \ldots, \mathbf{y_{i-1}}\}$.

Für alle $x \in \{0,1\}^n$ sei $P(x) := y_\ell$ die *Ausgabe* von P bei Eingabe von x. P *berechnet* die Funktion $f_P : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit $f_P(x) := P(x)$, für alle $x \in \{0,1\}^n$.

(a) Geben Sie ein Straight–Line–Programm an, das dieselbe Funktion wie der in Beispiel 6.2 gegebene Schaltkreis berechnet.

(b) Sei $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Zeigen Sie: Es gibt genau dann ein Straight–Line–Programm der Größe m, das f berechnet, wenn es einen Schaltkreis der Größe m gibt, der f berechnet.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie: Es existiert eine Schaltkreisfamilie der Größe $\mathcal{O}(n)$ für die folgende Sprache:

$$L := \{\langle a, b, a+b\rangle : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Eine Sprache L heißt *spärlich* (englisch: *sparse*) , falls es ein Polynom p gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left| L \cap \{0,1\}^n \right| \leqslant p(n).$$

Zeigen Sie: Jede spärliche Sprache liegt in $\mathsf{P}_{/\mathbf{poly}}$.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Finden Sie eine entscheidbare Sprache L mit $L \in \mathsf{P}_{/\mathbf{poly}}$ und $L \notin \mathsf{P}$. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.