Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 31.05.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 7

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 09.06.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Sei M eine (deterministische) Turingmaschine, seien x und y zwei Worte, die von M akzeptiert werden und seien $i, j \in \mathbb{N}_{>0}$ so dass $i \leqslant |x|$ und $j \leqslant |y|$. Seien x_1, x_2, y_1, y_2 Worte mit $|x_1| = i$ und $|y_1| = j$, so dass $x = x_1x_2$ und $y = y_1y_2$.

Zeigen Sie: Falls die Crossing-Sequenzen $C'_{i,M}(x)$ und $C'_{j,M}(y)$ gleich sind, so akzeptiert M auch das Wort x_1y_2.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei **PAL** $:= \{w \in \{0,1\}^* \ : \ w \text{ ist ein Palindrom } \}$. Zeigen Sie:

(a) **PAL** $\in$ L.

(b) Für jedes $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $S(n) = o(\log n)$ gilt: **PAL** $\notin \textsc{space}(S(n))$.

Lösungshinweis: Nehmen Sie an, M sei eine $S(n)$–platzbeschränkte TM, die **PAL** entscheidet, beweisen Sie die folgende Behauptung und folgern Sie aus dieser, dass M ein Wort akzeptieren muss, das kein Palindrom ist.

> *Behauptung:*
> Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes hinreichend große n mindestens ein Eingabewort der Länge $2n$ gibt, bei dessen Verarbeitung M die Position n mindestens $\frac{2n}{c \cdot S(2n)}$ mal besucht.

Zum Beweis der Behauptung können Sie einen Beweis durch Widerspruch führen und dabei Aufgabe 1 verwenden.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Satz 5.4 (b), d.h. zeigen Sie, dass für jedes $k \geqslant 1$ gilt:
Falls $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$, so ist PH $= \Sigma_k^p$.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $\Sigma_k^p = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \Sigma_k \text{TIME}(n^c)$ und $\Pi_k^p = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \Pi_k \text{TIME}(n^c)$.