Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 24.05.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 02.06.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie: Die Sprache

$$\textbf{2SAT} := \{\varphi : \varphi \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel in 2KNF}\}$$

ist NL–vollständig.

Hinweis: Zeigen Sie (1) $\overline{\textbf{2SAT}} \in \text{NL}$ und (2) $\overline{\textbf{PATH}} \leqslant_l \textbf{2SAT}$, und nutzen Sie den Satz von Immerman und Szelepcsényi.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Führen Sie die Details des Beweises von Theorem 4.27 (c) aus, d.h.:
Sei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platzkonstruierbar mit $S(n) \geqslant \log(n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\text{NSPACE}(S) = \text{coNSPACE}(S).$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie Behauptung 2 aus dem Beweis von Satz 4.28 der Vorlesung.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Ziel dieser Aufgabe ist, die Details der Behauptung 1 aus dem Beweis von Satz 4.28 herauszuarbeiten.

Sei Σ ein endliches Alphabet mit $\triangleright, \square \notin \Sigma$ und sei $\Gamma := \Sigma \cup \{\triangleright, \square\}$. Sei $M := (\Gamma, Q, \delta)$ eine (deterministische) 1–Band–Turingmaschine, die nur lesend auf ihr Band zugreifen darf (d.h. für alle $a \in \Gamma$ und $p \in Q$ ist $\delta(p, a) = (q, a, D)$, für ein $q \in Q$, $D \in \{L, S, R\}$). Da der Bandinhalt von M sich nie ändert, betrachten wir eine Konfiguration von M bei Eingabe von w einfach als Tupel aus $Q \times \mathbb{N}$. Die Turingmaschine M *akzeptiert* ein Wort $w \in \Sigma^*$, wenn M bei Eingabe w irgendwann die Konfiguration $(q_{\text{halt}}, |w| + 1)$ erreicht und zuvor niemals eine Konfiguration $(q, |w| + 1)$, für ein $q \neq q_{\text{halt}}$ einnimmt. Die *Sprache* von M ist $L(M) := \{w \in \Sigma^* : M \text{ akzeptiert } w\}$.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Wir wollen zeigen, dass $L(M)$ regulär ist.
Für alle $w \in \Sigma^*$ und alle Konfigurationen $(p, i) \in Q \times \mathbb{N}$ von M bei Eingabe w sagen wir, dass M das Wort w aus (p, i) *im Zustand* $q \in Q$ *verlässt*, wenn gilt: Falls M bei Eingabe von w irgendwann die Konfiguration (p, i) erreicht, so erreicht M auch die Konfiguration $(q, |w| + 1)$. Entsprechend sagen wir, dass M das Wort w aus (p, i) *niemals verlässt*, wenn es kein $q \in Q$ gibt, so dass M das Wort w aus (p, i) im Zustand q verlässt.

Sei $Q_{\mathbf{0}} := Q \cup \{\mathbf{0}\}$ und $Q_\perp := Q \cup \{\perp\}$, für $\mathbf{0}, \perp \notin Q$. Wir weisen jedem Wort $w \in \Sigma^+$ eine Funktion f_w von $Q_{\mathbf{0}}$ nach $Q_\perp$ zu, so dass für alle $p \in Q$ gilt:

- $f_w(p) = q \in Q \iff A$ verlässt w aus $(p, |w|)$ im Zustand q,
- $f_w(p) = \perp \iff A$ verlässt w aus $(p, |w|)$ niemals,
- $f_w(\mathbf{0}) = q \in Q \iff A$ verlässt w aus $(q_{\text{start}}, 0)$ im Zustand q,
- $f_w(\mathbf{0}) = \perp \iff A$ verlässt w aus $(q_{\text{start}}, 0)$ niemals.

Da $Q_{\mathbf{0}}$ und $Q_\perp$ endliche Mengen sind, ist die Menge der Funktionen von $Q_{\mathbf{0}}$ nach $Q_\perp$ endlich.

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Für alle $w, w' \in \Sigma^*$ gelte genau dann $w \sim w'$, wenn für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $wx \in L \iff w'x \in L$. Die Relation $\sim$ ist eine Kongruenzrelation. Der *Satz von Myhill-Nerode* besagt, dass die Sprache L genau dann regulär ist, wenn die Anzahl der Kongruenzklassen $\sim$ endlich ist.

(a) Benutzen Sie den Satz von Myhill-Nerode, um aus der Endlichkeit von $\{f_w : w \in \Sigma^+\}$ zu folgern, dass $L(M)$ regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass $L(M)$ regulär bleibt, wenn die obige Akzeptanzbedingung so abgeschwächt wird, dass M die Eingabe beliebig oft nach rechts verlassen darf (d.h. M akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn M bei Eingabe w irgendwann die Konfiguration $(q_{\text{halt}}, |w| + 1)$ erreicht).