Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 17.05.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 26.05.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Ein Problem $L' \subseteq \{0,1\}^*$ heißt POLYLOGSPACE–*vollständig*, falls $L' \in$ POLYLOGSPACE und $L \leqslant_\ell L'$ für jedes $L \in$ POLYLOGSPACE gilt. Zeigen Sie, dass es kein in diesem Sinn POLYLOGSPACE–vollständiges Problem gibt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Fakt 4.21 aus der Vorlesung: Eine Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ ist genau dann implizit logspace–berechenbar, wenn f write–once logspace–berechenbar ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Seien $f, g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ implizit logspace–berechenbare Funktionen und sei $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ die Funktion mit $h(x) = g\big(f(x)\big)$ für alle $x \in \{0,1\}^*$. Zeigen Sie, dass die folgende Sprache L'_h aus dem Beweis von Lemma 4.23 der Vorlesung in L liegt:

$$L'_h \ := \ \Big\{ \langle x, j \rangle : x \in \{0,1\}^*,\, j \in \mathbb{N},\, j \leqslant |h(x)| \Big\}.$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L_1 \ := \ \big\{ \langle A, w \rangle : A \text{ ist ein NFA über dem Alphabet } \{0,1\},\ w \in \{0,1\}^* \text{ und } w \text{ wird von } A \text{ akzeptiert.} \big\}.$$

NL–vollständig ist.

Beachten Sie: Überlegen Sie sich eine geeignete Repräsentation von A durch einen Bitstring $\llcorner A \lrcorner$.

(b) Im *Geographie*–Spiel nennen zwei Spieler abwechselnd die Namen von Städten. Wenn der Spieler, der gerade an der Reihe ist, eine Stadt nennt, die mit einem Buchstaben x endet, muss der nächste Spieler eine Stadt nennen, die mit diesem Buchstaben x beginnt (auf "Frankfurt" wäre also z.B. "Trier" eine zulässige Antwort). Dabei dürfen stets nur Städtenamen genannt werden, die im bisherigen Spielverlauf noch nicht verwendet wurden. Verloren hat der erste

Spieler, dem keine Erwiderung auf eine genannte Stadt einfällt.

Dieses Spiel lässt sich wie folgt formal beschreiben:
Sei $G := (V, E)$ ein endlicher, gerichteter Graph. Wir betrachten das *Verallgemeinerte Geographie–Spiel* auf $\langle G, v\rangle$, für einen Knoten $v \in V$. Das Spiel wird von zwei Spielern (Spieler I und Spieler II) gespielt, die abwechselnd am Zug sind. Spieler I beginnt das Spiel. Sei $G_1 := G$ und $v_1 := v$. Im i–ten Zug des Spiels seien ein induzierter Subgraph $G_i = (V_i, E_i)$ von G und ein Knoten $v_i \in V_i$ gegeben. Der Spieler, der an der Reihe ist, muss einen Knoten $v_{i+1} \in V_i$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E_i$ wählen. Wenn kein solcher Knoten v_{i+1} existiert, gewinnt der andere Spieler. Anschließend wird das Spiel auf dem Graphen G_{i+1} fortgeführt, der in G_i durch die Knotenmenge $V_{i+1} := V_i \setminus \{v_i\}$ induziert wird.

Zeigen Sie, dass die folgende Sprache PSPACE–vollständig ist:

$$\textbf{GEOGRAPHY} := \big\{\langle G, v\rangle : G := (V, E) \text{ ist ein gerichteter, endlicher Graph, } v \in V, \\ \text{Spieler I gewinnt das Verallg. Geographie–Spiel auf } \langle G, v\rangle\big\}.$$