Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 10.05.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 4

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 19.05.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Für $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ und $i \in [0, 2^\ell - 1]$ sei $\text{bin}_\ell(i)$ die Binärdarstellung von i der Länge ℓ. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\mathbf{L}_{\text{BIN}} \ := \ \{\langle \text{bin}_\ell(0), \text{bin}_\ell(1), \ldots, \text{bin}_\ell(2^\ell - 1)\rangle : \ell \geqslant 1\}$$

in $\text{SPACE}(\log \log n)$ liegt.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\textbf{MULT} \ := \ \{\langle \llcorner a \lrcorner, \llcorner b \lrcorner, \llcorner a \cdot b \lrcorner \rangle : a, b \in \mathbb{N}\}$$

in L liegt.

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\textbf{TQBF} \ := \ \{\Phi : \Phi \text{ ist eine } \textit{wahre} \text{ QBF}\}$$

in PSPACE liegt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie den Satz über die lineare Kompression: Sei $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und sei $0 < \epsilon \leqslant 1$. Sei M eine deterministische k–Band Turingmaschine, die eine Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ auf Platz $\leqslant S(n)$ berechnet. Dann gibt es auch eine deterministische 2–Band Turingmaschine, die f auf Platz $\leqslant \epsilon \cdot S(n)$ berechnet.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass es eine universelle Turingmaschine für platzbeschränkte Berechnungen gibt. Das heißt, zeigen Sie: Es gibt eine Turingmaschine SU, so dass für alle $\alpha \in \{0,1\}^*$, $x \in \{0,1\}^*$ und $t \in \mathbb{N}$ mit $t > \log(|\langle \alpha, x \rangle|)$ gilt:

$$SU(\alpha, x, t) \ = \ \begin{cases} M_\alpha(x) & , \quad \text{falls } M_\alpha \text{ bei Eingabe } x \text{ Platz} \leqslant t \text{ verbraucht,} \\ 0 & \quad\ \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem gibt es eine Zahl C, die nur von M_α abhängt, so dass SU bei Eingabe $\langle \alpha, x, t \rangle$ Platz $\leqslant C \cdot t$ verbraucht.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

(b) Beweisen Sie den Platzhierarchie-Satz, d.h. zeigen Sie: Sind $s, S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei platzkonstruierbare Funktionen mit $s(n) = o\big(S(n)\big)$, so ist

$$\textsc{space}\big(s(n)\big) \subsetneq \textsc{space}\big(S(n)\big).$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass $\textsc{space}(n) \neq \mathrm{NP}$ ist.

([AB], Aufgabe 3.2)