Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Informatik
Theorie komplexer Systeme
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Dienstag, 19.04.2011

Komplexitätstheorie

Sommersemester 2011

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis Donnerstag, 28.04.2011

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Im MIT Museum befindet sich eine bewegte Skulptur von Arthur Ganson, die den Namen *Maschine mit Beton* trägt. Die Maschine besteht aus 13 Zahnrädern, die in einer Reihe miteinander verbunden sind, so dass jedes Zahnrad sich fünfzigmal mal langsamer dreht als sein Vorgänger. Das schnellste Rad dreht sich mit 212 Umdrehungen pro Minute. Das langsamste Rad ist an einem Betonblock befestigt und kann sich somit offensichtlich nicht bewegen.
Erläutern Sie, weshalb die Maschine nicht auseinanderfällt.

([AB], Aufgabe 0.3)

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jede zeitkonstruierbare Funktion $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und jede Sprache $L \subseteq \{0,1\}^*$ gilt: Wenn $L \in \text{DTIME}\big(T(n)\big)$, so existiert eine stereotype Turingmaschine, die L in der Zeit $\mathcal{O}\big(T(n)^2\big)$ entscheidet.

([AB], Aufgabe 1.5)

Zur Erinnerung hier noch die Definition des Begriffs *stereotype Turingmaschine*:

Definition:

Eine Turingmaschine M heißt *stereotyp* (englisch: *oblivious*), wenn ihre Kopfbewegungen während einer Berechnung lediglich von der Eingabelänge abhängen. Genauer bedeutet das: Eine k–Band Turingmaschine M heißt stereotyp, wenn eine Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}^k$ existiert, so dass für jede Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ von M, jeden Berechnungsschritt $i \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}_{>0}$ genau dann $f(|x|, i) = (j_1, \ldots, j_k)$ gilt, wenn sich der ℓ–te Kopf von M im i–ten Berechnungsschritt auf der j_ℓ–ten Zelle des ℓ-ten Bands von M befindet (für $1 \leqslant \ell \leqslant k$).

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Sei **HALT** $:= \{\langle \alpha, x\rangle : M_\alpha$ hält bei Eingabe x, für $\alpha, x \in \{0,1\}^*\}$. Hierbei bezeichnet M_α die Turingmaschine, die durch das Wort α repräsentiert wird.

 (i) Zeigen Sie: **HALT** ist NP–hart.

 (ii) Frage: Ist **HALT** NP–vollständig?

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\leqslant_p$ nicht symmetrisch ist.

(c) Seien $L_1, L_2 \in \mathrm{NP}$.

  (i) Gilt $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{NP}$?

  (ii) Gilt $L_1 \cap L_2 \in \mathrm{NP}$?

([AB], Aufgaben 2.8–2.10)

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

(a) Beschreiben Sie eine Turingmaschine, die bei Eingabe eines Tupels $\langle x, y \rangle$, für $x, y \in \{0,1\}^*$, auf eines ihrer Bänder x und auf ein weiteres Band y ausgibt.

(b) Beschreiben Sie Turingmaschinen, die die folgenden Funktionen berechnen:

  (i) $x \mapsto |x|$, für alle $x \in \{0,1\}^*$.

  (ii) $\langle x, y \rangle \mapsto x + y$, für alle $x, y \in \mathbb{N}$.

  (iii) $\langle x, y \rangle \mapsto x \cdot y$, für alle $x, y \in \mathbb{N}$ (mit Hilfe des „Grundschulalgorithmus“).

(c) Sei $\mathcal{G}$ die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, deren Knotenmenge von der Form $[n]$ ist (für $n \in \mathbb{N}_{>0}$). Wir betrachten die folgende Sprache:

$$L := \big\{\langle G, i, j \rangle : G \in \mathcal{G},\ 1 \leqslant i, j \leqslant |V(G)|,\ \{i, j\} \in E(G)\big\}.$$

Zeigen Sie: $L \in \mathrm{P}$.

Orientieren Sie sich an den Beispielen aus der Vorlesung. Es kann nützlich sein, für die Beantwortung der Teilaufgaben die Ergebnisse der vorhergehenden Teilaufgaben zu verwenden.