Zusammenfassung:

Für die drei Fixpunktlogiken LFP (kleinste Fixpunktlogik), IFP (inflationäre Fixpunktlogik) und PFP (partielle Fixpunktlogik) gilt:

$$\text{LFP} \leqslant \text{IFP} \leqslant \text{PFP}$$

(d.h.: PFP ist mindestens so ausdrucksstark wie IFP, und IFP ist mindestens so ausdrucksstark wie LFP).

4.6 ~~2.2.5~~ Fixpunktlogiken und Komplexitätsklassen

Ähnlich zum Beweis des Satzes von Fagin kann man zeigen, dass die Logiken LFP und IFP die Komplexitätsklasse PTIME auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen beschreiben, und dass die Logik PFP die Komplexitätsklasse PSPACE auf der Klasse aller endlichen geordneten Strukturen beschreibt:

4.35 ~~2.46~~ **Theorem** (Satz von Immerman und Vardi, 1982). FinOrd := $\text{Fin}_{<}$.

(a) LFP *beschreibt* PTIME *auf* FinOrd.

(b) IFP *beschreibt* PTIME *auf* FinOrd.

Beweis: Wegen Lemma 4.24 ~~2.36~~ und Proposition 4.25 ~~2.37~~ folgt *(b)* direkt aus *(a)*. Von Lemma 4.18 ~~2.30~~ wissen wir, dass die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für LFP auf FinOrd in PTIME liegt. Im Folgenden brauchen wir also nur noch zu beweisen, dass jedes Problem aus PTIME durch eine LFP-Formel beschrieben werden kann. Sei dazu σ eine Signatur, die u.a. ein 2-stelliges Relationssymbol $<$ enthält, und sei $\mathsf{C} \subseteq$ FinOrd eine Klasse endlicher geordneter σ-Strukturen, so dass

$$L_{\mathsf{C}} := \{enc_{<}(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A} \in \mathsf{C}\} \in \text{PTIME}.$$

D.h. es gibt eine deterministische Turing-Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$ und eine Konstante $k \in \mathbb{N}$, so dass M bei Eingabe (der Kodierung) einer endlichen geordneten σ-Struktur $\mathfrak{A}$ entscheidet, ob $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}$ und dabei weniger als n^k Schritte macht. Wie beim Beweis des Satzes von Fagin bezeichnen wir mit n immer die Größe des Universums der Eingabe-Struktur $\mathfrak{A}$ und nehmen o.B.d.A. an, dass

- F_{akz} aus genau einem akzeptierenden Zustand q_{akz} besteht,
- jeder Lauf von M bei jeder Eingabe-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|A| \geqslant 2$ nach *genau* $n^k - 1$ Schritten in einem (akzeptierenden oder verwerfenden) Endzustand endet,
- $n^k \geqslant |enc(\mathfrak{A})|$,

152

- $Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ für ein $s_Q \in \mathbb{N}$, Endzustand $q_{\text{akz}} = 0$, Anfangszustand $q_0 = 1$,
- $\Gamma = \{0, 1, 2, .., s_\Gamma\}$ für ein $s_\Gamma \in \mathbb{N}$, Blank-Symbol $\Box = 2$,
- $s := \max\{s_Q, s_\Gamma\}$.

Da M *deterministisch* ist, können wir die Überführungsrelation Δ als Abbildung

$$\delta \ : \ (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$$

darstellen.

Unser Ziel ist, einen LFP$[\sigma]$-Satz ψ zu finden, so dass $\mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{FinOrd}}(\psi)$, d.h. für jede endliche geordnete σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{A} \models \psi & \iff & \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \\ & \iff & M \text{ akzeptiert } \mathfrak{A} \\ & \iff & \text{der Lauf von } M \text{ bei Eingabe } enc_{<}(\mathfrak{A}) \text{, endet nach } n^k{-}1 \\ & & \text{Schritten in Zustand } q_{\text{akz}}. \end{array}$$

Idee zur Konstruktion von ψ: Ähnlich wie im Beweis des Satzes von Fagin werden Zeitpunkte t und Bandpositionen p in $\{0, 1, .., n^k{-}1\}$ durch k-Tupel $\vec{t} = (t_1, .., t_k)$ bzw. $\vec{p} = (p_1, .., p_k)$ über $\{0, .., n{-}1\}$ kodiert. Unter Verwendung der linearen Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ kann man das Universum A mit der Menge $\{0, .., n{-}1\}$ identifizieren und k-Tupel $\vec{a} \in A^k$ mit Zahlen aus $\{0, 1, .., n^k{-}1\}$.
Jeden Zustand $q \in Q = \{0, 1, .., s_Q\}$ und jedes Symbol $\gamma \in \Gamma \in \{0, 1, .., s_\Gamma\}$ werden wir in einer Struktur $\mathfrak{A}$ durch das q-größte bzw. das γ-größte Element im Universum A repräsentieren.[4]
Um die Notation etwas übersichtlicher zu machen, nehmen wir o.B.d.A. an, dass σ zwei Konstantensymbole 0 und *max* enthält, die in geordneten σ-Strukturen stets mit dem kleinsten bzw. dem größten Element der linearen Ordnung interpretiert werden.

Der Lauf der DTM M bei Eingabe $enc_{<}(\mathfrak{A})$ wird durch folgende $(2k+2)$-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{2k+2}$ repräsentiert: $enc(\mathfrak{A}) := enc_{<^{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{A})$

- $(0, \vec{t}, \vec{p}, 0) \in R^{\mathfrak{A}} \iff$ der Schreib-/Lesekopf steht zum Zeitpunkt $\vec{t}$ auf Bandposition $\vec{p}$.
- $(1, \vec{t}, \vec{p}, \gamma) \in R^{\mathfrak{A}} \iff$ auf Bandposition $\vec{p}$ steht zum Zeitpunkt $\vec{t}$ das Symbol γ.
- $(max, \vec{t}, m\vec{a}x, q) \in R^{\mathfrak{A}} \iff M$ ist zum Zeitpunkt $\vec{t}$ in Zustand q.

[4] Der LFP-Satz ψ, den wir im Folgenden konstruieren, wird daher nur für solche Strukturen $\mathfrak{A}$ korrekt sein, die mehr als $s = \max\{s_Q, s_\Gamma\}$ Elemente besitzen. Das ist aber nicht weiter schlimm, denn es gibt nur *endlich* viele verschiedene σ-Strukturen mit $\leqslant s$ Elementen, und diese kann man explizit durch eine weitere FO-Formel abhandeln.

bis auf Isomorphie

 153

Wir konstruieren im Folgenden eine FO$[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$-Formel $\varphi(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z)$, die schrittweise die Relation $R^{\mathfrak{A}}$ so aufbaut, dass $R^{\mathfrak{A}}$ durch "$[\mathbf{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\,\varphi]$" beschrieben wird. Die einzelnen Induktionsstufen entsprechen dabei den Zeitpunkten während der Berechnung von M, d.h.:

$$
\begin{aligned}
R^0 &= \varnothing, \\
R^1 &= \text{“Startkonfiguration bei Eingabe } enc(\mathfrak{A})\text{”} \\
&= \{(u, \vec{t}, \vec{p}, z) \in R^{\mathfrak{A}} \;:\; rg_{<^{\mathfrak{A}}_{lex}}(\vec{t}) = 0\}, \\
&\;\;\vdots \\
R^{i+1} &= \{(u, \vec{t}, \vec{p}, z) \in R^{\mathfrak{A}} \;:\; rg_{<^{\mathfrak{A}}_{lex}}(\vec{t}) \leqslant i\}.
\end{aligned}
$$

Wenn φ so konstruiert ist, dann gilt (beachte dazu, dass $q_{\text{akz}} = 0$):

$$M \text{ akzeptiert } \mathfrak{A} \iff \mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\,\varphi](max, \vec{max}, \vec{max}, 0).$$

Die Formel φ ist von der Form

$$
\begin{aligned}
&\varphi(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z) \;:= \\
&\exists z_0 \cdots \exists z_s \left(\varphi_{Zahlen}(z_0, .., z_s) \;\wedge\; \Big(\big(\text{“}\vec{t} = \vec{0}\text{”} \;\wedge\; \varphi_{Start}(u, \vec{p}, z)\big) \;\vee\; \varphi_{Schritt}(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z)\Big)\right),
\end{aligned}
$$

wobei $\varphi_{Zahlen}(z_0, \ldots, z_s)$ eine FO$[<]$-Formel ist, die besagt, dass die Variablen $z_0, .., z_s$ mit den $s{+}1$ kleinsten Elementen aus dem Universum der jeweiligen Struktur belegt werden.

Um die Startkonfiguration von M bei Eingabe $enc(\mathfrak{A})$ durch die Formel φ_{Start} zu beschreiben, benutzen wir die Formeln $\zeta_0(\vec{p})$ und $\zeta_1(\vec{p})$ aus dem Beweis des Satzes von Fagin ~~(Theorem 2.8)~~, die besagen, dass in dem 0-1-Wort $enc(\mathfrak{A})$ an Position $rg^{\mathfrak{A}}_{<_{lex}}(\vec{p})$ das Symbol 0 bzw. das Symbol 1 steht. Wir wählen

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{Start}(u, \vec{p}, z) \;:= \\
&\quad\big(\; u = 0 \;\;\wedge\; \text{“}\vec{p} = \vec{0}\text{”} \;\wedge\; z = 0\big) && \text{(Kopf auf Position 0)} \\
&\vee \big(u = max \;\wedge\; \text{“}\vec{p} = \vec{max}\text{”} \;\wedge\; z = z_1\big) && \text{(M ist im Startzustand $q_0 = 1$)} \\
&\vee \Big(\; u = z_1 \;\;\wedge\; \Big(\big(z = 0 \;\wedge \zeta_0(\vec{p})\big) \vee && \text{(Bandbeschriftung: $enc(\mathfrak{A})$)} \\
&\qquad\qquad\qquad\; \big(z = z_1 \wedge \zeta_1(\vec{p})\big) \vee \\
&\qquad\qquad\qquad\; \big(z = z_2 \;\wedge \neg(\zeta_0(\vec{p}) \vee \zeta_1(\vec{p}))\big)\Big)\Big) && \text{(Beachte: Blank-Symbol $\square = 2$)}
\end{aligned}
$$

Für die Formel $\varphi_{Schritt}$ sei $\chi_m(\vec{p}\,', \vec{p})$ für $m \in \{-1, 0, 1\}$ eine Formel, die besagt "$\vec{p} = \vec{p}\,'{+}m$", d.h.:

$$\chi_1(\vec{p}\,', \vec{p}) := succ_{<_{lex}}(\vec{p}\,', \vec{p}), \quad \chi_{-1}(\vec{p}\,', \vec{p}) := succ_{<_{lex}}(\vec{p}, \vec{p}\,'), \quad \chi_0(\vec{p}\,', \vec{p}) := \text{“}\vec{p}\,' = \vec{p}\text{”}.$$

154

Wir wählen

$$\varphi_{Schritt}(R, u, \vec{t}, \vec{p}, z) \ :=$$

$$\begin{array}{ll}
\exists \vec{t}'\, \exists \vec{p}' \Big(succ_{<_{lex}}(\vec{t}', \vec{t}) \ \wedge\ R(0, \vec{t}', \vec{p}', 0) \ \wedge & \text{(Kopfpos. } \vec{p}' \text{ zum Zeitpkt. } \vec{t}' := \vec{t}{-}1) \\
\qquad \bigvee\limits_{\substack{q' \in Q \setminus F, \gamma' \in \Gamma, \\ (q, \gamma, m) := \delta(q', \gamma')}} \Big(R(max, \vec{t}', m\vec{a}x, z_{q'}) \ \wedge\ R(z_1, \vec{t}', \vec{p}', z_{\gamma'}) \ \wedge & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t}'\text{: in Zustand } q'\text{, liest Symbol } \gamma') \\
\qquad\qquad \Big(\ \big(u = max \ \wedge\ \vec{p} = m\vec{a}x \ \wedge\ z = z_q\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ in Zustand } q) \\
\qquad\qquad \vee\ \big(u = 0 \ \wedge\ \chi_m(\vec{p}', \vec{p}) \ \wedge\ z = 0\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ Kopfpos. } \vec{p}'{+}m) \\
\qquad\qquad \vee\ \big(u = z_1 \ \wedge\ \text{``}\vec{p}' = \vec{p}\text{''} \ \wedge\ z = z_\gamma\big) & \text{(zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ Symbol } \gamma \text{ auf Pos. } \vec{p}') \\
\qquad\qquad \vee\ \big(u = z_1 \ \wedge\ \text{``}\vec{p}' \neq \vec{p}\text{''} \ \wedge\ R(z_1, \vec{t}', \vec{p}, z)\big) \Big) \Big) \Big) & \text{(auf Pos. } \vec{p} \neq \vec{p}' \text{ zum Zeitpkt. } \vec{t} \text{ gleiches Symbol wie zum Zeitpkt. } \vec{t}')
\end{array}$$

Man beachte, dass diese Formel *positiv* in R ist. Daher ist die Formel

$$\psi \ := \ [\mathrm{lfp}_{R,u,\vec{t},\vec{p},z}\, \varphi](max, m\vec{a}x, m\vec{a}x, 0)$$

eine LFP$[\sigma]$-Formel.
Per Induktion nach i kann man leicht für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ zeigen, dass die $(i{+}1)$-te Induktionsstufe R^{i+1} des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ aus genau den Tupeln $(u, \vec{t}, \vec{p}, z) \in A^{2k+2}$ besteht, für die gilt: $j := rg_{<^{\mathfrak{A}}_{lex}}(\vec{t}) \leqslant i$ und

$$\{(u', \vec{t}', \vec{p}', z') \in R^{i+1} \ : \ \vec{t}' = \vec{t}\}$$

kodiert die Konfiguration von M bei Eingabe $enc_{\leq}(\mathfrak{A})$ zum Zeitpunkt j.
Daraus folgt dann direkt:

$$M \text{ akzeptiert } enc(\mathfrak{A}) \iff (max^{\mathfrak{A}}, m\vec{a}x^{\mathfrak{A}}, m\vec{a}x^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}) \in R^{n^k} \iff \mathfrak{A} \models \psi.$$

Somit sind wir fertig mit dem Beweis von Theorem ~~2.46~~ 4.35 □

Auf ähnliche Art kann man auch folgendes beweisen:

4.40 ~~2.47~~ **Theorem.** PFP *beschreibt* PSPACE *auf* FinOrd.

Beweis: Ähnlich zum Beweis von Theorem 4.39 ~~2.46~~. Beachte: Eine PSPACE-Berechnung kann evtl. aus exponentiell vielen Schritten bestehen. Daher kann nicht mehr jeder Berechnungszeitpunkt t durch ein k-Tupel $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in A^k$ kodiert werden. Insgesamt konstruiert man für jedes Problem $\mathsf{C} \subseteq$ FinOrd in PSPACE eine FO$[\sigma]$-Formel $\varphi(R, u, \vec{p}, z)$, so dass für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models [\mathrm{pfp}_{R,u,\vec{p},z}\, \varphi](max, m\vec{a}x, 0).$$

Rest: *Übung*. □

4.41 ~~2.48~~ **Bemerkung.** In den Theoremen ~~2.46~~ 4.39 und ~~2.47~~ 4.40 ist es wichtig, dass die Strukturen in FinOrd liegen, d.h. dass die Strukturen *geordnet* sind, also eine 2-stellige Relation enthalten, von der man weiß, dass sie eine lineare Ordnung des Universums der Struktur darstellt. Beim Satz von Fagin, der besagt

$$\text{ESO beschreibt NP auf Fin},$$

war dies nicht nötig, da man sich in einer ESO-Formel eine lineare Ordnung "raten" bzw. definieren kann. ~~In Kapitel 3 (Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele) werden wir beweisen, dass dies *nicht* durch eine Fixpunktformel geleistet werden kann und dass daher gilt:~~
Aus Korollar 4.38 wissen wir bereits, dass gilt:

$$\text{LFP bzw. IFP beschreibt } \textit{nicht} \text{ PTIME auf Fin},$$

$$\text{PFP beschreibt } \textit{nicht} \text{ PSPACE auf Fin}.$$

Aus den Theoremen ~~2.46~~ 4.39 und ~~2.47~~ 4.40 ergibt sich direkt:

4.42 ~~2.49~~ **Korollar.** $\text{PSPACE} = \text{PTIME} \iff \text{PFP} = \text{LFP}$ *auf* FinOrd.

Dabei heißt "PFP = LFP auf FinOrd", dass es zu jedem PFP-Satz ψ einen LFP-Satz ψ' gibt, so dass für jede endliche geordnete Struktur $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{A} \models \psi'.$$

(Die Umkehrung gilt sowieso, da LFP $\leqslant$ PFP; vgl. Proposition ~~2.45~~ 4.33.)

4.43 ~~2.50~~ **Bemerkung.** Es gilt sogar die folgende Verschärfung von Korollar ~~2.49~~ 4.42, die als *Satz von Abiteboul und Vianu* bekannt ist ~~und die wir in Kapitel 5 (Fixpunktlogiken) auch beweisen werden:~~

$$\text{PSPACE} = \text{PTIME} \iff \text{PFP} = \text{LFP auf FinOrd} \iff \text{PFP} = \text{LFP auf Fin}.$$

Ähnlich wie beim Beweis des Satzes von Cook, bei dem wir die logische Charakterisierung von NP genutzt haben, um die NP-Vollständigkeit des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems nachzuweisen, können wir die logische Charakterisierung von PSPACE nutzen, um die PSPACE-Vollständigkeit des Auswertungsproblems für FO zu beweisen ~~(dies wurde in Kapitel 1, Satz 1.61 schon erwähnt, aber noch nicht bewiesen):~~

4.44 ~~2.51~~ **Satz.** *Die kombinierte Komplexität des Auswertungsproblems für* FO *auf* FinOrd *ist* PSPACE-*vollständig.*

Beweis: ~~Mit Satz 1.60 wurde bereits gezeigt~~ Man sieht leicht, dass die kombinierte Komplexität des Auswertungsproblems für FO in PSPACE liegt. Im Folgenden zeigen wir, dass das Problem auch PSPACE-hart ist, d.h. dass sich jedes Problem $L \in$ PSPACE auf das Auswertungsproblem für FO reduzieren lässt. Jedes Problem $L \in$ PSPACE kann man, für eine geeignete Signatur σ, mit einer Klasse $\mathsf{C} \subseteq$ FinOrd (bzw. der zugehörigen Menge L_{C}) identifizieren. Da nach Voraussetzung $L_{\mathsf{C}} \in$ PSPACE ist, liefert Theorem ~~2.47~~ 4.40, dass es einen PFP$[\sigma]$-Satz Φ gibt, so

156

dass für jede endliche geordnete σ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models \Phi$.
Aus dem Beweis von Theorem ~~2.47~~ 4.40 folgt, dass Φ o.B.d.A. von der Form

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{max}, 0)$$

ist, wobei $\varphi(R, \vec{x}) \in \mathrm{FO}[\sigma \dot{\cup} \{R\}]$. Sei $r := ar(R)$ die Stelligkeit von R und sei $\vec{x} = x_1, \ldots, x_r$.
Aus Bemerkung ~~2.39~~ 4.27 folgt, dass für jede endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$, für $n := |A|$, für $N := n^r = |A^r|$ und für die Induktionsstufen R^i des Operators $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gilt:

(1) Falls $R^{2^N} = R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = R^{2^N}$.

(2) Falls $R^{2^N} \neq R^{2^N+1}$, so $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = \varnothing$.

Unser Ziel ist, eine Polynomialzeit-Reduktion f von $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FinOrd}$ auf das Auswertungsproblem für FO zu finden.

__*Ansatz:*__ f bildet jedes $\mathfrak{A} \in \mathsf{FinOrd}$ (von dem man wissen will, ob es zur Klasse C gehört) auf ein Tupel $(\mathfrak{A}, \psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ ab, wobei $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz ist, für den gilt:

(3) $\mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models \Phi \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{max}, 0)$.

(4) $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ ist in Zeit, die polynomiell in $|A|$ ist, berechenbar.
Insbesondere ist die Länge $|\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}|$ der Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ polynomiell in der Größe von $\mathfrak{A}$.

__*Idee:*__ Sei $\mathfrak{A}$ gegeben und sei $n := |A|$ und $N := n^r$. O.B.d.A. ist $n \geqslant 2$, insbesondere werden also die Konstantensymbole 0 und *max* durch zwei verschiedene Elemente in A interpretiert.
Seien $v_1, \ldots, v_N$ Variablen erster Stufe und seien $\vec{x}, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_N$ jeweils r-Tupel von Variablen erster Stufe. Für jedes $i \in \{0, \ldots, N\}$ definieren wir induktiv eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi_i(\,\vec{x},\ \vec{y}_1, v_1,\ \vec{y}_2, v_2,\ \ldots, \vec{y}_N, v_N\,),$$

so dass für alle $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_N \in A^r$ und alle $d_1, \ldots, d_N \in \{0^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}}\}$ gilt:

$$(*)_i: \quad \{\, \vec{a} \in A^r \ :\ \mathfrak{A} \models \varphi_i[\vec{a}, \vec{b}_1, d_1, \ldots, \vec{b}_N, d_N]\,\} \ =\ \underbrace{F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^i}}_{2^i\text{-fache Anwendung des Operators } F_{\varphi,\mathfrak{A}}}\Big(\{\vec{b}_j \ :\ 1 \leqslant j \leqslant N,\ d_j \neq 0^{\mathfrak{A}}\}\Big)$$

Bevor wir die genaue Konstruktion der Formeln φ_i (für $i \in \{0, \ldots, N\}$) angeben, zeigen wir zunächst, wie wir die gewünschte Formel $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ aus φ_N erhalten. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \Phi \quad &\iff \quad \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{max}, 0) \\
&\iff \quad (\vec{max}, 0) \in R^{2^N} \quad \text{und} \quad R^{2^N} = R^{2^N+1} \\
&\iff \quad \mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}},
\end{aligned}$$

wobei

$\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$:=

$$\exists \vec{y}_1 \exists v_1 \cdots \exists \vec{y}_N \exists v_N \Big(\bigwedge_{j=1}^{N} \big(v_j = 0 \lor v_j = max \big) \qquad \text{(Zeile 1)}$$

$$\land \forall \vec{x} \Big(\varphi_N(\vec{x}, \vec{y}_1, 0, .., \vec{y}_N, 0) \leftrightarrow \bigvee_{j=1}^{N} (v_j \neq 0 \land \vec{x} = \vec{y}_j) \Big) \qquad \text{(Zeile 2)}$$

$$\land \Big(\bigvee_{j=1}^{N} \big(v_j \neq 0 \land \vec{y}_j = (\vec{max}, 0) \big) \Big) \qquad \text{(Zeile 3)}$$

$$\land \forall \vec{x} \Big(\big(\bigvee_{j=1}^{N} (v_j \neq 0 \land \vec{x} = \vec{y}_j) \big) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \land \vec{u} = \vec{y}_j)}) \Big) \Big) \qquad \text{(Zeile 4)}$$

Dabei besagt

- Zeile 2, dass $R^{2^N} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}{}^{2^N}(\varnothing) = \{\vec{y}_j : v_j \neq 0\}$,
- Zeile 3, dass $(\vec{max}, 0) \in R^{2^N}$,
- Zeile 4, dass $R^{2^N} = R^{2^N+1} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\varphi,\mathfrak{A}}(R^{2^N})$.

  Hierbei bezeichnet $\varphi(\vec{x}, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \land \vec{u} = \vec{y}_j)})$ die Formel, die aus $\varphi(R, \vec{x})$ entsteht, indem jedes Vorkommen eines Atoms der Form $R(\vec{u})$ durch die Formel $\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \land \vec{u} = \vec{y}_j)$ ersetzt wird.

Klar ist: Wenn die Formel φ_N die Eigenschaft $(*)_N$ hat und in Zeit poly(n) konstruierbar ist, so ist auch $\psi_{\Phi,\mathfrak{A}}$ in Zeit poly(n) konstruierbar und es gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathsf{C} \iff \mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}}\varphi](\vec{max}, 0) \iff \mathfrak{A} \models \psi_{\Phi,\mathfrak{A}}.$$

Somit ist die Abbildung, die jeder σ-Struktur $\mathfrak{A} \in$ FinOrd das Tupel $(\mathfrak{A}, \psi_{\Phi,\mathfrak{A}})$ zuordnet, eine Polynomialzeit-Reduktion von C auf das Auswertungsproblem für FO auf FinOrd.
Um den Beweis von Satz ~~2.64~~ 4.44 zu beenden, müssen wir also nur noch die gewünschte Formel φ_N konstruieren. Dazu konstruieren wir induktiv für $i \in \{0, .., N\}$ Formeln φ_i mit Eigenschaft $(*)_i$, so dass

$$|\varphi_{i+1}| \leqslant n^{\text{Konstante}} + |\varphi_i|.$$

Insgesamt ist dann

$$|\varphi_N| \leqslant N \cdot n^{\text{Konstante}} = n^r \cdot n^{\text{Konstante}} = \text{poly}(n).$$

Induktionsanfang $i = 0$: $2^i = 2^0 = 1$. Wir setzen

$$\varphi_0(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N) := \varphi\Big(\vec{x}, \frac{R(\vec{u})}{\bigvee_{j=1}^{N}(v_j \neq 0 \land \vec{u} = \vec{y}_j)}\Big).$$

Offensichtlich hat φ_0 die Eigenschaft $(*)_0$, und es gilt $|\varphi_0| = \mathcal{O}(|\varphi| \cdot r \cdot N) = \text{poly}(n)$.

<u>*Induktionsschritt $i \to i{+}1$:*</u> Um eine Formel $\varphi_{i+1}(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N)$ mit der Eigenschaft $(*)_{i+1}$ zu konstruieren, nutzen wir, dass für $F := F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gilt:

$$F^{2^{i+1}}\big(\{\vec{y}_j : v_j \neq 0\}\big) \;=\; F^{2^i}\Big(F^{2^i}\Big(\{\vec{y}_j : v_j \neq 0\}\Big)\Big),$$

setzen

$$\begin{array}{lcl} \{\vec{y}\,'_j : v'_j \neq 0\} & := & F^{2^i}\Big(\{\vec{y}_j : v_j \neq 0\}\Big) \quad \text{und} \\ \{\vec{y}\,''_j : v''_j \neq 0\} & := & F^{2^i}\Big(\{\vec{y}\,'_j : v'_j \neq 0\}\Big) \;=\; F^{2^{i+1}}\Big(\{\vec{y}_j : v_j \neq 0\}\Big) \end{array}$$

und nutzen die Formel φ_i, um die Mengen $\{\vec{y}\,'_j : v'_j \neq 0\}$ und $\{\vec{y}\,''_j : v''_j \neq 0\}$ zu bestimmen. Ein technisches Problem dabei ist, dass die Formel φ_{i+1} nicht *zweimal* die Formel φ_i "aufrufen" kann (einmal mit $\vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N$ und dann noch mal mit $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$, um zuerst $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$ und danach $\vec{y}\,''_1, v''_1, .., \vec{y}\,''_N, v''_N$ zu ermitteln). Dann wäre nämlich φ_{i+1} *doppelt* so lang wie φ_i, und am Ende wäre

$$|\varphi_N| \;\geqslant\; 2^N \cdot |\varphi|,$$

und das ist viel zu lang als dass man φ_N noch in Zeit poly(n) berechnen könnte.
Um dies zu vermeiden, wählen wir die folgende Formel, die Allquantoren benutzt, um mit einem einzigen "Aufruf" der Formel φ_i sowohl die Werte $\vec{y}\,'_1, v'_1, .., \vec{y}\,'_N, v'_N$ als auch die Werte $\vec{y}\,''_1, v''_1, .., \vec{y}\,''_N, v''_N$ festzulegen.

$$\varphi_{i+1}(\vec{x}, \vec{y}_1, v_1, .., \vec{y}_N, v_N) \;:=$$

$$\begin{array}{l}
\exists \vec{y}\,'_1\, \exists v'_1 \cdots \exists \vec{y}\,'_N\, \exists v'_N\; \exists \vec{y}\,''_1\, \exists v''_1 \cdots \exists \vec{y}\,''_N\, \exists v''_N\; \Big(\\
\quad \bigvee_{j=1}^{N} \big(v''_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,''_j\big) \;\wedge \\
\quad \bigwedge_{j=1}^{N} \big(v'_j = 0 \,\vee\, v'_j = max\big) \;\wedge\; \bigwedge_{j=1}^{N} \big(v''_j = 0 \,\vee\, v''_j = max\big) \;\wedge \\
\quad \forall \vec{w}_1 \forall u_1 \cdots \forall \vec{w}_N \forall u_N \Big(\big(\, \overrightarrow{(\vec{w},u)} = \overrightarrow{(\vec{y},v)} \;\vee\; \overrightarrow{(\vec{w},u)} = \overrightarrow{(\vec{y}\,',v')}\,\big) \;\to \\
\qquad\qquad \big(\, \forall \vec{x} \;\big(\; \varphi_i(\vec{x}, \vec{w}_1, u_1, .., \vec{w}_N, u_N) \;\leftrightarrow \\
\qquad\qquad\qquad \Big(\big(\, \overrightarrow{(\vec{w},u)} = \overrightarrow{(\vec{y},v)} \;\wedge\; \bigvee_{j=1}^{N} (\, v'_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,'_j\,)\,\big) \;\vee \\
\qquad\qquad\qquad \big(\, \overrightarrow{(\vec{w},u)} = \overrightarrow{(\vec{y}\,',v')} \;\wedge\; \bigvee_{j=1}^{N} (\, v''_j \neq 0 \,\wedge\, \vec{x} = \vec{y}\,''_j\,)\,\big)\Big)\big)\,\big)\Big)\Big),
\end{array}$$

wobei "$\overrightarrow{(\vec{w},u)} = \overrightarrow{(\vec{y},v)}$" als Abkürzung für die Formel $\bigwedge_{j=1}^{N}$ ("$\vec{w}_j = \vec{y}_j$" $\wedge\; u_j = v_j$) benutzt wird.

Gemäß dieser Konstruktion hat φ_{i+1} die Eigenschaft $(*)_{i+1}$ und es gilt

$$|\varphi_{i+1}| \;\leqslant\; n^{\text{Konstante}} + |\varphi_i|.$$

Speziell für $i = N$ gilt: Die Formel φ_N hat die Eigenschaft $(*)_N$ und kann in Zeit $\mathrm{poly}(n)$ konstruiert werden. Somit sind wir fertig mit dem Beweis von Satz ~~2.51~~ 4.44. □

2.3 TC-Logiken zur Beschreibung von LOGSPACE und NLOGSPACE

2.3.1 Die Logik TC

2.52 Definition. Sei A eine Menge, sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und sei $R \subseteq A^{2k}$.
Die *transitive Hülle* (engl.: transitive closure) $\mathbf{tc}(R)$ von R ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{tc}(R) \;:=\; \left\{ (\vec{x},\vec{y}) \in A^{2k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt im Graphen } G_R := (V,E) \text{ mit } V_R := A^k \\ \text{und } E_R := \{(\vec{u},\vec{v}) \in A^k \times A^k \,:\, (\vec{u},\vec{v}) \in R\} \text{ einen} \\ \text{Pfad}^5 \text{der Länge} \geqslant 1 \text{ von Knoten } \vec{x} \text{ zu Knoten } \vec{y} \end{array} \right\}.$$

2.53 Definition (Transitive Hüllen-Logik TC). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge TC$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (TC) definiert:

(TC) Ist $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ eine TC$[\sigma]$-Formel, wobei

- $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei k-Tupel aus paarweise verschiedenen Variablen erster Stufe sind, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- φ außer $\vec{x}$ und $\vec{y}$ evtl. noch andere freie Variablen erster Stufe hat,

und sind $\vec{s}$ und $\vec{t}$ zwei k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, so ist

$$[\mathbf{tc}_{\vec{x},\vec{y}}\,\varphi](\vec{s},\vec{t})$$

eine TC$[\sigma]$-Formel.

2.54 Bemerkungen.

(a) Man beachte, dass es in der Logik TC *keine* Relationsvariablen gibt.

(b) Jede Formel $\varphi(\vec{x},\vec{y})$ mit $2k$ freien Variablen $\vec{x},\vec{y}$ definiert in jeder Struktur $\mathfrak{A}$ (der passenden Signatur) eine $2k$-stellige Relation

$$\varphi(\mathfrak{A}) \;:=\; \{\, (\vec{u},\vec{v}) \in A^{2k} \;:\; \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{u},\vec{v}] \,\}$$

und einen Graph $G_{\varphi,\mathfrak{A}} := (V_{\varphi,\mathfrak{A}}, E_{\varphi,\mathfrak{A}})$ mit $V_{\varphi,\mathfrak{A}} = A^k$ und $E_{\varphi,\mathfrak{A}} = \varphi(\mathfrak{A})$.

[5] Ein Pfad der Länge $\ell \in \mathbb{N}$ ist dabei eine Folge $\vec{v}_0,\ldots,\vec{v}_\ell \in V_R$ von Knoten, so dass für alle $i < \ell$ gilt: $(\vec{v}_i,\vec{v}_{i+1}) \in E_R$.