

Wahl der Formel $\varphi(R, x)$:

$$\varphi(R, x) := \left(P_a(x) \wedge \neg \exists y (P_a(y) \wedge y < x) \right) \vee \left(\exists z \exists y (R(z) \wedge P_a(y) \wedge P_a(x) \wedge (z < y < x) \wedge \forall u ((\neg(z < u < y \vee y < u < x)) \vee P_b(u))) \right).$$

4.18

2.20 Lemma.

Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für LFP auf Fin liegt in PTIME.

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$\psi := [\text{lfp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t}).$$

Nach Induktionsannahme kann die Formel φ für jede Induktionsstufe R^i in polynomieller Zeit ausgewertet werden. Die Behauptung folgt damit aus Proposition 2.21. 4.9. \square

2.23 Inflationäre Fixpunktlogik

Bei der Definition der *kleinsten Fixpunktlogik* wurde durch ein syntaktisches Kriterium (nämlich dadurch, dass die Formel $\varphi(R, \vec{x})$ positiv in R sein muss), gewährleistet, dass die Sequenz R^0, R^1, R^2, \dots der Induktionsstufen *induktiv* ist, d.h.

$$R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \dots \subseteq R^i \subseteq R^{i+1} \subseteq \dots,$$

und daher der induktive Fixpunkt $R^\infty = R^{\text{cl}(F)}$ existiert.

In diesem Abschnitt werden wir die Bedingung " $\varphi(R, \vec{x})$ positiv in R " fallenlassen und stattdessen durch explizites Vereinigen erzwingen, dass jede Induktionsstufe ihre gesamte Vorgängerstufe enthält.

4.19

2.31 Definition (Inflationärer Fixpunkt $\text{ifp}(F)$). Zu jeder endlichen Menge A und jeder Abbildung $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$ ist die Abbildung I_F wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I_F : \text{Pot}(A) &\rightarrow \text{Pot}(A) \\ X &\mapsto X \cup F(X). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist I_F inflationär und hat daher einen induktiven Fixpunkt $R^\infty = R^{\text{cl}(I_F)}$. R^∞ heißt der *inflationäre Fixpunkt* von F , geschrieben $\text{ifp}(F)$.

4.20

2.32 Bemerkung. Falls F monoton ist, so haben F und I_F die gleichen Induktionsstufen, und es gilt $\text{ifp}(F) = \text{lfp}(F)$.

4.21

2.33 Definition (Inflationäre Fixpunktlogik IFP). Sei σ eine Signatur.

Die Formelmenge $\text{IFP}[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (IFP) definiert:

(IFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine IFP $[\sigma]$ -Formel, wobei

- R eine k -stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,
- $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und \vec{x} evtl. noch andere freie Variablen hat,

und ist $\vec{t} = t_1, \dots, t_k$ ein k -Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ , so ist

$$[\text{ifp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t})$$

eine IFP $[\sigma]$ -Formel.

4.22

2.34 Definition (Semantik von IFP $[\sigma]$ -Formeln). Die Semantik von IFP $[\sigma]$ -Formeln der Form $\psi := [\text{ifp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:

Ist $\text{frei}(\psi) = \{\vec{u}, \vec{S}\}$ und ist \mathfrak{A} eine endliche $(\sigma \cup \{\vec{u}, \vec{S}\})$ -Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\text{ifp}_{R, \vec{x}} \varphi](\vec{t}) \iff \vec{t}^{\mathfrak{A}} \in \text{ifp}(F_{\varphi, \mathfrak{A}}).$$

4.23

2.35 Beispiel. Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, mit der Wörter $w \in \{a, b\}^*$ als σ -Strukturen \mathfrak{A}_w kodiert werden (~~siehe Übungsblatt 1~~).

Wir definieren eine Formel $\varphi(R, x)$, so dass für alle nicht-leeren Worte $w = w_0 \dots w_{n-1} \in \{a, b\}^*$ gilt:

$$\mathfrak{A}_w \models \forall u [\text{ifp}_{R, x} \varphi](u) \iff w \in \{a^n b^n : n \geq 1\}.$$

Wir wählen $\varphi(R, x) :=$

$$\begin{aligned} & \left(\text{“}P_a(0)\text{“} \wedge \text{“}P_b(\text{max})\text{“} \wedge (\text{“}x = 0\text{“} \vee \text{“}x = \text{max}\text{“}) \right) \vee \\ & \exists y \exists z \left(y < z \wedge R(y) \wedge R(z) \wedge \forall v (\text{“}y < v < z\text{“} \rightarrow \neg R(v)) \wedge \right. \\ & \quad \left. \text{“}P_a(y+1)\text{“} \wedge \text{“}P_b(z-1)\text{“} \wedge (\text{“}x = y+1\text{“} \vee \text{“}x = z-1\text{“}) \right). \end{aligned}$$

Für die i -te Induktionsstufe R^i des inflationären Fixpunkts von F gilt dann:

$$R^i = \{0, \dots, j, n-1, \dots, n-1-j : \underbrace{j < i}_{\text{und } n = |w| - 1} \text{ maximal, so dass } w \in a^j \{a, b\}^* b^j\}.$$

Man beachte, dass $\varphi(R, x)$ nicht positiv in R ist, dass “ $\forall u [\text{ifp}_{R, x} \varphi](u)$ ” also keine LFP-Formel ist.

4.24

2.36 Lemma.

Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für IFP auf Fin liegt in PTIME.

4.18

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 2.30 für LFP. □

4.25

2.37 Proposition. Jede LFP-Formel ist äquivalent zu einer IFP-Formel (kurz: LFP \leq IFP).

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\text{Ifp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t}),$$

wobei $\varphi(R, \vec{x})$ eine LFP-Formel ist, die *positiv* in R ist. Insbesondere ist die Abbildung $F_{\varphi, \mathfrak{A}}$ *monoton* für alle Strukturen \mathfrak{A} . Gemäß Induktionsannahme gibt es eine IFP-Formel $\varphi'(R, \vec{x})$, die äquivalent zu $\varphi(R, \vec{x})$ ist. Insbesondere gilt $F_{\varphi', \mathfrak{A}} = F_{\varphi, \mathfrak{A}}$ für alle Strukturen \mathfrak{A} . Aus Bemerkung 2.32 folgt direkt, dass die Formel

$$[\text{ifp}_{R,\vec{x}} \varphi'](\vec{t})$$

äquivalent zur Formel $[\text{Ifp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$ ist. □

^{4.4}
~~2.2.4~~ **Partielle Fixpunktlogik**

Von den Lemmas ^{4.13} 2.30 und ^{4.24} 2.36 wissen wir, dass jedes Problem, das durch eine LFP-Formel oder eine IFP-Formel beschrieben werden kann, zur Komplexitätsklasse PTIME gehört. Zur Beschreibung von Problemen, deren Komplexität jenseits von PTIME liegt, eignen sich die Logiken LFP und IFP also nicht.

Um eine Logik größerer Ausdrucksstärke zu erhalten, beschränken wir im Folgenden die Aufmerksamkeit nicht mehr nur auf *induktive* Abbildungen F bzw. I_F , sondern betrachten *beliebige* Abbildungen $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$. Für diese bildet die Sequenz R^0, R^1, R^2, \dots der Induktionsstufen nicht mehr unbedingt eine aufsteigende Kette, und sie wird auch nicht immer stationär, erreicht also nicht notwendigerweise einen Fixpunkt.

^{4.26}
~~2.38~~ **Definition** (Partieller Fixpunkt $\text{pfp}(F)$). Sei A eine Menge und $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$ eine beliebige Abbildung. Der *partielle Fixpunkt* $\text{pfp}(F)$ ist definiert als

$$\text{pfp}(F) := \begin{cases} R^i, & \text{falls es ein } i \in \mathbb{N} \text{ gibt, so dass } R^i = R^{i+1}, \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

^{4.27}
~~2.39~~ **Bemerkung.** Jede partielle Fixpunktinduktion über einer n -elementigen Menge A kann höchstens $2^n = |\text{Pot}(A)|$ viele Induktionsschritte durchlaufen, bevor entweder ein Fixpunkt erreicht oder die Induktion zyklisch wird. Es gilt:

- (1) Falls $R^{2^n-1} = R^{2^n}$, so $\text{pfp}(F) = R^{2^n}$.
- (2) Falls $R^{2^n-1} \neq R^{2^n}$, so $\text{pfp}(F) = \emptyset$.

Beweis: Es gibt nur 2^n verschiedene Teilmengen von A . Somit gibt es $i < j$ mit $i, j \in \{0, \dots, 2^n\}$, so dass $R^i = R^j$.

Falls $R^i = R^{i+1}$, so ist $\text{pfp}(F) = R^i = R^{i+1} = R^{2^n-1} = R^{2^n}$.

Falls $R^i \neq R^{i+1}$, so ist die Folge R^0, R^1, R^2, \dots der Iterationsstufen von der Form

$$R^0, R^1, \dots, R^{i-1}, \left(\overbrace{R^i, R^{i+1}, \dots, R^{j-1}}^{=R^j} \right)^*.$$

Daher existiert kein $k \in \mathbb{N}$ mit $R^k = R^{k+1}$. Insbesondere gilt: $R^{2^n-1} \neq R^{2^n}$ und $\text{pfp}(F) = \emptyset$. \square

4.28

2.40 Bemerkung. Für *induktive* Abbildungen $F : \text{Pot}(A) \rightarrow \text{Pot}(A)$ existiert der partielle Fixpunkt und es gilt: $\text{pfp}(F) = \text{ifp}(F)$.

4.29

2.41 Beispiel. Im Folgenden konstruieren wir eine Formel $\varphi(R, x)$, so dass für jede linear geordnete endliche Menge $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ gilt:

- (1) Für jede Teilmenge $X \subseteq A$ gibt es ein $i < 2^{|\mathfrak{A}|}$, so dass die i -te Induktionsstufe R^i von $F_{\varphi, \mathfrak{A}}$ genau die Menge X ist, und
- (2) $\text{pfp}(F_{\varphi, \mathfrak{A}}) = R^{(2^{|\mathfrak{A}|})} = A$.

Die Induktionsstufen R^0, R^1, R^2, \dots durchlaufen also sämtliche Teilmengen von A und enden schließlich mit der Menge A als partiellem Fixpunkt.

Idee zur Konstruktion von $\varphi(R, x)$:

Sei $A = \{a_0 <^{\mathfrak{A}} \dots <^{\mathfrak{A}} a_{n-1}\}$. Eine Menge $X \subseteq A$ kodiert ein 0-1-Wort $w_X = w_{n-1} \dots w_0$ – bzw. die Zahl $z_X := \sum_{i < n} w_i \cdot 2^i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ – via

$$w_i = 1 \iff a_i \in X.$$

Die Formel $\varphi(R, x)$ zählt mit ihren Induktionsstufen alle (Binärdarstellungen von) Zahlen aus $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ der Reihe nach auf. Wir wählen dazu $\varphi(R, x) :=$

$$(\forall z R(z)) \vee \exists y (\neg R(y) \wedge \forall z (z < y \rightarrow R(z)) \wedge (x = y \vee (x > y \wedge R(x))))).$$

Durch Betrachten der Binärdarstellungen sieht man leicht, dass

- $R^0 = \emptyset$,
- für alle $i < 2^n - 1$ gilt: $z_{R^{i+1}} = z_{R^i} + 1$, und
- für $i = 2^n - 1$ gilt: $R^i = A = R^{i+1}$.

4.30

2.42 Definition (Partielle Fixpunktlogik PFP). Sei σ eine Signatur.

Die Formelmenge $\text{PFP}[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (PFP) definiert:

(PFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine $\text{PFP}[\sigma]$ -Formel, wobei

- R eine k -stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,
- $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und \vec{x} evtl. noch andere freie Variablen hat,

und ist $\vec{t} = t_1, \dots, t_k$ ein k -Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ , so ist

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$$

eine PFP[σ]-Formel.

4.31

~~2.43~~ **Definition** (Semantik von PFP[σ]-Formeln). Die Semantik von PFP[σ]-Formeln der Form $\psi := [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:

Ist $\text{frei}(\psi) = \{\vec{u}, \vec{S}\}$ und ist \mathfrak{A} eine endliche $(\sigma \cup \{\vec{u}, \vec{S}\})$ -Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t}) \quad : \iff \quad \vec{t}^{\mathfrak{A}} \in \mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}).$$

4.32

~~2.44~~ **Lemma.**

Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für PFP auf Fin liegt in PSPACE.

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t}).$$

Gemäß Induktionsannahme kann für jede Induktionsstufe R^i die Formel $\varphi(R, \vec{x})$ in einer endlichen Struktur \mathfrak{A} auf Platz polynomiell in $|A|$ ausgewertet werden.

Jede Induktionsstufe R^i ist eine Teilmenge von A^k (mit $k := ar(R)$) und kann somit auf Platz polynomiell in $|A|$ gespeichert werden.

Um R^{i+1} aus R^i zu berechnen, braucht man *nur 2 Stufen* zu speichern (nämlich R^i und R^{i+1}). Sind R^i und R^{i+1} berechnet und gespeichert, so kann man ohne zusätzlichen Platzaufwand testen, ob $R^i = R^{i+1}$, der partielle Fixpunkt also erreicht ist. Wenn bei $i = 2^{\lfloor |A|^k \rfloor}$ immer noch kein partieller Fixpunkt erreicht wurde, so muss ein Zyklus eingetreten sein, und man weiß, dass $\mathbf{pfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}) = \emptyset$ ist.

Insgesamt kann man die Formel $[\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t})$ also auf polynomiell Platz auswerten. □

4.33

~~2.45~~ **Proposition.** Jede IFP-Formel ist äquivalent zu einer PFP-Formel (kurz: $\text{IFP} \leq \text{PFP}$).

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t}).$$

Für inflationäre Abbildungen existiert der partielle Fixpunkt immer und ist identisch mit dem inflationären Fixpunkt. Es gilt daher:

$$[\mathbf{ifp}_{R,\vec{x}} \varphi](\vec{t}) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad [\mathbf{pfp}_{R,\vec{x}} (R(\vec{x}) \vee \varphi)](\vec{t}).$$

□

4.5 Fixpunktlogiken und $L_{\infty\omega}^\omega$ **5 Fixpunktlogiken**

In Kapitel 2.2 haben wir verschiedene Erweiterungen der Logik erster Stufe um Fixpunkt-Konstrukte kennengelernt, insbesondere die Logiken LFP, IFP und PFP. Standen dort vor allem die Anwendung dieser Logiken zur Beschreibung von Komplexitätsklassen im Vordergrund, so werden wir in diesem Kapitel genauer auf die Eigenschaften von Fixpunktlogiken an sich eingehen.

Anschließend an Abschnitt 3.3 werden wir zunächst zeigen, dass sich alle bisher behandelten Fixpunktlogiken in die Logik $L_{\infty\omega}^\omega$ einbetten lassen. Anschließend werden wir auf eine syntaktische Variante solcher Logiken eingehen, die das Aufschreiben von Formeln stark vereinfacht und modularisiert.

5.1 Fixpunktlogiken und $L_{\infty\omega}^\omega$

Zur Erinnerung: In Definition 1.11 hatten wir bereits festgelegt, dass

- Fin die Klasse aller endlichen Strukturen bezeichnet (über beliebigen Signaturen),
- FinOrd die Klasse aller endlichen linear geordneten Strukturen bezeichnet (über beliebigen Signaturen, die ein 2-stelliges Relationssymbol $<$ enthalten, das stets durch eine lineare Ordnung auf dem Universum der jeweiligen Struktur interpretiert wird).

4.34

5.1 Definition. (a) Für Logiken \mathcal{L} und \mathcal{L}' und eine Klasse \mathbf{C} von Strukturen schreiben wir " $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ auf \mathbf{C} ", falls es für jede Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ eine Formel $\varphi' \in \mathcal{L}'$ gibt, die zu φ auf \mathbf{C} äquivalent ist, d.h. $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$ und für alle $\mathfrak{A} \in \mathbf{C}$ und alle Interpretationen $\bar{a} \in A$ der freien Variablen von φ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi'[\bar{a}]$.

(b) Entsprechend schreiben wir " $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ auf \mathbf{C} ", falls $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$ auf \mathbf{C} . Analog schreiben wir " $\mathcal{L} < \mathcal{L}'$ auf \mathbf{C} ", falls $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ auf \mathbf{C} und $\mathcal{L}' \not\leq \mathcal{L}$ auf \mathbf{C} .

(c) Ist \mathcal{K} eine Komplexitätsklasse, so schreiben wir " $\mathcal{L} = \mathcal{K}$ auf \mathbf{C} ", falls \mathcal{L} die Klasse \mathcal{K} auf \mathbf{C} beschreibt (im Sinne von Definition 2.1).

(d) Entsprechend schreiben wir " $\mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ auf \mathbf{C} ", falls die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für \mathcal{L} auf \mathbf{C} in \mathcal{K} liegt (im Sinne von Definition 2.1 (a)).

Analog schreiben wir " $\mathcal{K} \leq \mathcal{L}$ auf \mathbf{C} ", falls jedes Problem in \mathcal{K} durch einen Satz in \mathcal{L} beschrieben werden kann (im Sinne von Definition 2.1 (b)).

4.35

5.2 Satz. Es gilt: $\text{LFP} \leq \text{IFP} \leq \text{PFP} < L_{\infty\omega}^\omega$ auf Fin .

Proposition 4.25 und 4.33

Beweis: LFP \leq IFP \leq PFP auf Fin wurde schon in ~~Kapitel 2.2 (Proposition 2.37 und 2.45)~~ gezeigt.

Wir zeigen als nächstes, dass $L_{\infty\omega}^{\omega} \not\leq$ PFP. Sei dazu $J \subseteq \mathbb{N}$ eine unentscheidbare Menge, z.B. die Menge der Gödel-Nummern aller Turing-Maschinen, die bei leerer Eingabe halten. Sei φ_J der in Beispiel 3.4 konstruierte $L_{\infty\omega}^3$ -Satz, der genau die Strukturen $\mathfrak{A} := (A, <^{\mathfrak{A}})$ als Modelle hat, für die $|A| \in J$ und $<^{\mathfrak{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist. Da J unentscheidbar ist, ist auch $\text{Mod}_{\text{Fin}}(\varphi)$ unentscheidbar. Andererseits ist jede in PFP definierbare Klasse von Strukturen entscheidbar (und kann laut Lemma 4.32 sogar in PSPACE entschieden werden). Folglich kann es keinen zum $L_{\infty\omega}^3$ -Satz φ_J äquivalenten PFP-Satz geben.

Es bleibt zu zeigen, dass $\text{PFP} \leq L_{\infty\omega}^{\omega}$ auf Fin, d.h. dass jede PFP-Formel φ auf Fin äquivalent ist zu einer $L_{\infty\omega}^{\omega}$ -Formel $\hat{\varphi}$. Der Beweis folgt per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist, wenn φ die Form

$$[\text{pfp}_{R,\vec{x}} \psi](\vec{t})$$

hat. Dabei sei $r := ar(R)$, $\vec{x} = x_1, \dots, x_r$ und $\vec{t} = t_1, \dots, t_r$.

*o.B.d.A. gilt:
frei($\hat{\psi}$) = frei(ψ) = $\{x_1, \dots, x_r\}$*

Gemäß Induktionsannahme ist ψ äquivalent zu einer $L_{\infty\omega}^{\omega}$ -Formel $\hat{\psi}$. Wegen $L_{\infty\omega}^{\omega} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L_{\infty\omega}^k$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $\hat{\psi} \in L_{\infty\omega}^k$. Insbesondere kommen in $\hat{\psi}$ nur k verschiedene Variablen erster Stufe vor, und $\text{frei}(\hat{\psi}) = \text{frei}(\psi) \supseteq \{x_1, \dots, x_r\}$.

Seien $\vec{y} := y_1, \dots, y_r$ neue Variablen erster Stufe, die nicht in $\hat{\psi}$ vorkommen. Wir definieren induktiv für jedes $\alpha \in \mathbb{N}$ eine $L_{\infty\omega}^{k+r}$ -Formel $\hat{\psi}^{\alpha}(\vec{x})$, die die α -te Stufe der partiellen Fixpunktinduktion über $\hat{\psi}$ definiert:

- $\hat{\psi}^0(\vec{x}) := \bigwedge_{i=1}^r \neg x_i = x_i$ (d.h. $\hat{\psi}^0$ ist eine Formel, die nie erfüllt ist)
- $\hat{\psi}^{\alpha+1}(\vec{x})$ entsteht aus $\hat{\psi}^{\alpha}(\vec{x})$, indem jedes Vorkommen eines Atoms der Form $R(\vec{u})$, für ein Tupel $\vec{u} = u_1, \dots, u_r$ von Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ durch die (zur Formel $\hat{\psi}^{\alpha}(\vec{x})$ äquivalenten) Formel

$$\exists y_1 \dots \exists y_r \left(\bigwedge_{i=1}^r y_i = u_i \wedge \exists x_1 \dots \exists x_r \left(\left(\bigwedge_{i=1}^r x_i = y_i \right) \wedge \hat{\psi}^{\alpha}(\vec{x}) \right) \right)$$

ersetzt wird.¹

Hierbei ist die Verwendung der neuen Variablen y_1, \dots, y_r nötig, da die Variablen x_1, \dots, x_r als Terme in \vec{u} vorkommen könnten.

Per Induktion nach α zeigt man leicht, dass für jede Struktur \mathfrak{A} und alle $\vec{a} \in A^r$ gilt:

$$\vec{a} \in R^{\alpha} \iff \mathfrak{A} \models \hat{\psi}^{\alpha}[\vec{a}],$$

¹Zur Erinnerung: In Kapitel 3 hatten wir vereinbart, Substitutionen in Bezug auf k -Variablen Logiken zu vermeiden und lieber explizite Variablenumbenennungen zu verwenden.

Aus dem 0-1-Gesetz für L_{low}^w folgt direkt:

4.36 Korollar

Jede der Logiken LFP, IFP und PFP besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. ALL(σ), für jede endliche relationale Signatur σ und bzgl. der Klasse \mathcal{UG} aller ungerichteten Graphen

150

5.2 Simultane Fixpunkte

155

wobei R^α die α -te Stufe der partiellen Fixpunktinduktion über ψ in \mathcal{A} bezeichnet. Daher ist die Formel $\varphi := [pfp_{R, \vec{x}} \psi](\vec{t})$ äquivalent zur L_{low}^{k+r} -Formel

$$\varphi := \bigvee_{\alpha \in \mathbb{N}} \left(\hat{\psi}^\alpha(\vec{t}) \wedge \forall \vec{x} (\hat{\psi}^\alpha(\vec{x}) \leftrightarrow \hat{\psi}^{\alpha+1}(\vec{x})) \right).$$

Hierbei steht $\hat{\psi}^\alpha(\vec{t})$ wiederum für $\exists \vec{y} \left(\bigwedge_{i=1}^r y_i = t_i \wedge \exists \vec{x} \left(\bigwedge_{i=1}^r x_i = y_i \wedge \hat{\psi}^\alpha(\vec{x}) \right) \right)$. \square

Aus Satz 3.52, Beispiel 3.61 und Theorem 3.62 folgt sofort:

4.37

5.3 Korollar. (a) Die Klasse Even ist nicht PFP-definierbar in Fin.

(b) Die Klasse Hamilton ist nicht PFP-definierbar in Fin.

Da man selbstverständlich die Klasse Even in Polynomialzeit entscheiden kann, folgt daraus wiederum:

4.38

5.4 Korollar. Es gilt

(a) PFP $<$ PSPACE auf Fin

(zum Vergleich beachte: $PFP = PSPACE$ auf Fin_{Ord})

(b) LFP \leq IFP $<$ PTIME auf Fin

(zum Vergleich beachte: $LFP = IFP = PTIME$ auf Fin_{Ord})

(c) PTIME $\not\leq$ PFP auf Fin

~~(d) Falls PTIME \neq PSPACE, so gilt PFP $\not\leq$ PTIME auf Fin.~~

~~-PTIME und PFP liegen vermutlich also schief zueinander.~~

Beweis: Übung. \square

In den folgenden Abschnitten wird die Ausdrucksstärke der verschiedenen Fixpunktlogiken genauer untersucht.

5.2 Simultane Fixpunkte

5.5 Definition. Sei $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien A_1, \dots, A_m Mengen. Ferner sei für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ eine Abbildung

$$F_i : Pot(A_1) \times \dots \times Pot(A_m) \rightarrow Pot(A_i)$$

gegeben.

(a) Die simultane Abbildung über F_1, \dots, F_m , kurz: $\vec{F} := (F_1, \dots, F_m)$, ist definiert als

$$\vec{F} : Pot(A_1) \times \dots \times Pot(A_m) \rightarrow Pot(A_1) \times \dots \times Pot(A_m)$$

$$\vec{R} := (R_1, \dots, R_m) \mapsto (F_1(\vec{R}), \dots, F_m(\vec{R})).$$