Kapitel 4: Fixpunktlogiken

~~§4 2.2 Deskriptive Komplexität~~

4.1 ~~2.2.1~~ Etwas Fixpunkttheorie

Wir schreiben $\text{Pot}(A)$, um die Potenzmenge einer Menge A zu bezeichnen, d.h.

$$\text{Pot}(A) \;=\; \{X \,:\, X \subseteq A\}.$$

Insbesondere gilt natürlich für jedes *endliche* A, dass $|\text{Pot}(A)| \;=\; 2^{|A|}$.

4.1 ~~2.13~~ **Definition.** Sei A eine Menge und $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ eine Abbildung.

(a) F heißt *monoton*, falls für alle Mengen $P, Q \in \text{Pot}(A)$ gilt:

$$P \subseteq Q \implies F(P) \subseteq F(Q).$$

(b) F heißt *inflationär*, falls für alle $P \in \text{Pot}(A)$ gilt: $P \subseteq F(P)$.

(c) Eine Menge $P \in \text{Pot}(A)$ heißt *Fixpunkt* von F, falls $F(P) = P$.

(d) Eine Menge $P \in \text{Pot}(A)$ heißt *kleinster Fixpunkt* von F, falls P ein Fixpunkt von F ist und für jeden Fixpunkt Q von F gilt: $P \subseteq Q$.

4.2 ~~2.14~~ **Proposition.**

(a) Es gibt Abbildungen, die weder monoton noch inflationär sind.

(b) Es gibt Abbildungen, die monoton, aber nicht inflationär sind.

(c) Es gibt Abbildungen, die inflationär, aber nicht monoton sind.

(d) Es gibt Abbildungen, die keinen Fixpunkt besitzen.

(e) Für jede Abbildung $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ *gilt:*
Falls es einen kleinsten Fixpunkt von F gibt, so ist dieser eindeutig bestimmt.

Beweis: *Übung.* □

Der folgende Satz charakterisiert die kleinsten Fixpunkte *monotoner* Abbildungen:

4.3 ~~2.15~~ **Satz** (Knaster und Tarski).
Sei A eine Menge und $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ *eine monotone Abbildung.*
Dann hat F einen kleinsten Fixpunkt, der $\text{lfp}(F)$ *genannt wird, und es gilt:*[3]

$$\text{lfp}(F) \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \,:\, F(X) = X\} \;=\; \bigcap\{X \subseteq A \,:\, F(X) \subseteq X\}.$$

[3] Für eine Menge M, deren Elemente selbst Mengen sind, schreiben wir $\bigcap M$, um die Schnittmenge $\bigcap_{X \in M} X$ zu bezeichnen.

Beweis: Sei

$$M := \{X \subseteq A : F(X) \subseteq X\} \quad \text{und} \quad P := \bigcap M.$$

Schritt 1: *Wir zeigen zunächst, dass P ein Fixpunkt von F ist:*

"$F(P) \subseteq P$": Da $P = \bigcap M$, gilt für jedes $X \in M$, dass $P \subseteq X$. Da F monoton ist, folgt $F(P) \subseteq F(X)$. Wegen $X \in M$ gilt $F(X) \subseteq X$. Somit gilt für alle $X \in M$, dass $F(P) \subseteq X$. Daher gilt also:

$$F(P) \subseteq \bigcap M \stackrel{\text{def}}{=} P.$$

"$P \subseteq F(P)$": Da (wie wir gerade gezeigt haben) $F(P) \subseteq P$ ist, folgt aus der Monotonie von F, dass auch $F\big(F(P)\big) \subseteq F(P)$. Somit gilt $F(P) \in M$. Wegen $P = \bigcap M$ folgt daher $P \subseteq F(P)$.

Schritt 2: *Für jeden Fixpunkt Q von F gilt $P \subseteq Q$, denn:*

Für jeden Fixpunkt Q von F gilt $F(Q) \subseteq Q$. Daher ist $Q \in M$, und gemäß Definition von P daher $P \subseteq Q$.

Schritt 3: *Abschluss des Beweises:*

Aus den Schritten 1 und 2 folgt, dass P der kleinste Fixpunkt von F ist.
Außerdem gilt für die Menge

$$M' := \{X \subseteq A : F(X) = X\},$$

dass $P \in M'$ (da $F(P) = P$) und $M' \subseteq M$. Somit folgt

$$P \underset{(\text{Def.})}{=} \bigcap M \underset{(M \supseteq M')}{\subseteq} \bigcap M' \underset{(P \in M')}{\subseteq} P.$$

Daher gilt für $\mathbf{lfp}(F) := P$, dass

$$\mathbf{lfp}(F) = \bigcap\{X \subseteq A : F(X) = X\} = \bigcap\{X \subseteq A : F(X) \subseteq X\}$$

der kleinste Fixpunkt von F ist. □

Eine andere Charakterisierung der kleinsten Fixpunkte monotoner Funktionen, die auch gleich ein Verfahren zum *Ausrechnen* des kleinsten Fixpunkts liefert, ergibt sich durch die Betrachtung der einzelnen *Induktionsstufen*:

44 ~~2.16~~ Definition (Induktionsstufen).
Sei A eine *endliche* Menge und $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ eine Abbildung.

(a) Wir definieren induktiv eine Sequenz von Mengen $R^0, R^1, R^2, \ldots$ durch

$$R^0 := \varnothing \qquad \text{und} \qquad R^{i+1} := F\big(R^i\big) \qquad (\text{für alle } i \in \mathbb{N}).$$

Die Menge R^i heißt *i-te Induktionsstufe* (oder auch: i-te Stufe).

(Es gilt also für alle $i \in \mathbb{N}$: $R^i = F^i(\varnothing)$.)

(b) F heißt *induktiv*, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $R^i \subseteq R^{i+1}$.

4.5 **~~2.17~~ Proposition.**

(a) Jede monotone oder inflationäre Abbildung ist induktiv.

(b) Es gibt Abbildungen, die induktiv, aber weder monoton noch inflationär sind.

Beweis: *Übung.* □

4.6 **~~2.18~~ Proposition.** *Für jede endliche Menge A und jede induktive Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ wird die Sequenz der Induktionsstufen stationär, d.h. es gibt eine Zahl $i \leqslant |A|$, so dass $R^i = R^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} F(R^i)$, und somit $R^i = R^{i+n}$ für alle $n \geqslant 0$.*

Beweis: Da F induktiv ist, gilt

$$\varnothing = R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^j \subseteq R^{j+1} \subseteq \cdots \subseteq A.$$

Da A nur $|A|$ viele Elemente besitzt, kann *nicht* für alle $j \in \{0, 1, \ldots, |A|\}$ gelten, dass $R^j \subsetneqq R^{j+1}$ (denn sonst würde in jeder der Stufen $1, 2, \ldots, |A|, |A|+1$ mindestens ein neues Element hinzukommen, in A gibt es aber nur $|A|$ viele Elemente).
Somit muss es also ein $i \in \{0, 1, \ldots, |A|\}$ geben, so dass $R^i = R^{i+1}$. Gemäß der Definition der Stufen ($R^{j+1} := F(R^j)$) folgt daraus, dass

$$R^i = F(R^i) = F(F(R^i)) = F(F(F(R^i))) = \cdots,$$

also

$$R^i = R^{i+1} = R^{i+2} = R^{i+3} = \cdots.$$

□

4.7 **~~2.19~~ Definition.** Sei A eine endliche Menge und $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ induktiv.

(a) Die kleinste Zahl i, für die $R^i = R^{i+1}$ (d.h. $F^i(\varnothing) = F^{i+1}(\varnothing) = F^{i+n}(\varnothing)$, für alle $n \geqslant 0$), heißt das *Abschlussordinal* von F, oder kurz: $\mathrm{cl}(F)$.

(b) Die Menge $R^\infty := R^{\mathrm{cl}(F)}$ heißt *induktiver Fixpunkt* von F.

4.8
~~2.20~~ **Satz.** *Sei A eine endliche Menge.*
Für jede monotone Abbildung $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ gilt:

$$\text{lfp}(F) \;=\; R^\infty.$$

D.h.: Der induktive Fixpunkt einer monotonen Abbildung ist gerade der kleinste Fixpunkt.

Beweis: "$\subseteq$": Gemäß der Definition des inflationären Fixpunkts gilt $R^\infty = F(R^\infty)$, R^∞ ist also ein Fixpunkt von F. Insbesondere gilt

$$\text{lfp}(F) \subseteq R^\infty,$$

da der kleinste Fixpunkt gemäß Definition in jedem anderen Fixpunkt enthalten ist.
"$\supseteq$": Per Induktion zeigen wir, dass $R^i \subseteq \text{lfp}(F)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
$i = 0$: Klar, da $R^0 = \varnothing \subseteq \text{lfp}(F)$.
$i \to i{+}1$: Per Induktion gilt $R^i \subseteq \text{lfp}(F)$. Da F monoton ist, folgt, dass

$$R^{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} F(R^i) \;\subseteq\; F(\text{lfp}(F)) \;=\; \text{lfp}(F).$$

□

Den kleinsten Fixpunkt einer monotonen Funktion kann man leicht berechnen, indem man nach und nach die einzelnen Induktionsstufen berechnet und abbricht, sobald diese stationär werden:
4.9
~~2.21~~ **Proposition.** *Ist $F : \text{Pot}(A) \to \text{Pot}(A)$ monoton und in polynomieller Zeit berechenbar, so kann* $\text{lfp}(F)$ *in polynomieller Zeit berechnet werden.*

Beweis: Es gibt höchstens $|A|$ Induktionsstufen, und jede davon kann in polynomieller Zeit aus der vorangegangenen berechnet werden. □

4.2
~~2.2.2~~ Die kleinste Fixpunktlogik

4.10
~~2.22~~ **Definition** (Operator $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$).
Sei σ eine Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, R eine k-stellige Relationsvariable und $\vec{x} = x_1, \ldots, x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe.
Jede FO$[\sigma\dot{\cup}\{R\}]$-Formel $\varphi(R, \vec{x})$ definert in jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine Abbildung $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ wie folgt:

$$\begin{array}{rlcl} F_{\varphi,\mathfrak{A}}: & \text{Pot}(A^k) & \to & \text{Pot}(A^k) \\ & P & \mapsto & \{\vec{a} \in A^k : \mathfrak{A} \models \varphi[P, \vec{a}]\}. \end{array}$$

Zum Beispiel kann man sich φ als Datenbankanfrage vorstellen und $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ als die Abbildung, die jeder Datenbank-Relation P das Ergebnis der Anfrage zuordnet.

Die im Folgenden definierte *monotone Fixpunktlogik* ist eine Erweiterung der Logik erster

Stufe durch einen Operator, mit dem man aus einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ eine neue Formel erhalten kann, die $[\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ genannt wird, und die in jeder Struktur $\mathfrak{A}$ genau von den Tupeln $\vec{t} \in A^k$ erfüllt wird, die zu dem kleinsten Fixpunkt der Operation $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ gehören. Dafür sollte man natürlich wissen, ob der kleinste Fixpunkt auch wirklich existiert. Gemäß dem Satz von Knaster und Tarski (Satz 2.15) existiert der kleinste Fixpunkt von $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ auf jeden Fall dann, wenn $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *monoton* ist.

4.11
~~2.23~~ **Definition** (Monotone Fixpunktlogik MFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge MFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1), (A2), (A3), (BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (MFP) definiert:

(MFP) Ist $\varphi(R,\vec{x})$ eine MFP$[\sigma]$-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1,\ldots,x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat (etwa $\vec{u},\vec{S}$),

ist $\vec{t} = t_1,\ldots,t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist ***$F_{\varphi,\mathfrak{A}}$* monoton auf jeder endlichen** $(\sigma\dot\cup\{\vec{u},\vec{S}\})$***-Struktur*** $\mathfrak{A}$, so ist

$$[\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$$

eine MFP$[\sigma]$-Formel.

4.12
~~2.24~~ **Bemerkungen.**

(a) Die Menge der *freien Variablen* einer MFP$[\sigma]$-Formel ist induktiv definiert wie für FO bzw. SO, mit der zusätzlichen Regel

$$\mathit{frei}\big([\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})\big) \;:=\; \big(\mathit{frei}(\varphi)\setminus\{R,\vec{x}\}\big)\cup\{t_i \,:\, t_i \in \mathrm{Var}_1\}.$$

(b) Gilt $\mathit{frei}(\varphi) = \{R,\vec{x},\vec{u},\vec{S}\}$, für ein Tupel $\vec{u}$ von Variablen erster Stufe und ein Tupel $\vec{S}$ von Relationsvariablen, so nennen wir die Variablen in $\vec{u}$ die *Parameter* der Formel $[\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}(\varphi)](\vec{t})$.

4.13
~~2.25~~ **Definition** (Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln). Die Semantik von MFP$[\sigma]$-Formeln der Form $\psi := [\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t})$ ist folgendermaßen definiert:
Ist $\mathit{frei}(\psi) = \{\vec{u},\vec{S}\}$ und ist $\mathfrak{A}$ eine endliche $(\sigma\dot\cup\{\vec{u},\vec{S}\})$-Struktur, so gilt:

$$\mathfrak{A} \models [\mathrm{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}) \quad :\Longleftrightarrow \quad \vec{t}^{\,\mathfrak{A}} \in \mathrm{lfp}(F_{\varphi,\mathfrak{A}}).$$

Aus dem Satz von Trakhtenbrot folgt leicht,
~~Aus Satz 1.68 ist bekannt~~, dass Monotonie von FO-Formeln auf endlichen Strukturen unentscheidbar ist. Es gibt also keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel $\varphi(R,\vec{x})$ entscheidet, ob $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ für alle endlichen Strukturen $\mathfrak{A}$ monoton ist.

Daher ist die Syntax von MFP unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel ψ entscheidet, ob diese zu MFP gehört.

Wünschenswert wäre, eine Fixpunktlogik zu definieren, bei der man schon an der Syntax einer Formel erkennt, ob diese zur Logik gehört oder nicht. Ein rein *syntaktisches* Kriterium, das hinreichend für Monotonie ist, wird durch die folgende Definition gegeben:

4.14 ~~2.26~~ **Definition.** Eine Formel $\varphi(R, \vec{x})$ heißt *positiv in* R (bzw. *negativ in* R), falls Atome der Form $R(\vec{y})$ in φ stets im Bereich einer *geraden* (bzw. *ungeraden*) Anzahl von Negationssymbolen vorkommen und in φ kein Implikationspfeil "$\rightarrow$" und kein Biimplikationspfeil "$\leftrightarrow$" vorkommt.

Man sieht leicht:

4.15 ~~2.27~~ **Proposition.** *Für jede Formel* $\varphi(R, \vec{x})$, *die positiv in* R *ist, gilt:* $F_{\varphi,\mathfrak{A}}$ *ist* monoton *für alle Strukturen* $\mathfrak{A}$.

Beweisidee: Per Induktion nach dem Formelaufbau zeigt man, dass für jede Formel

$$\varphi(\vec{x}, R_1, .., R_k, S_1, .., S_\ell),$$

die *positiv* in $R_1, .., R_k$ und *negativ* in $S_1, .., S_\ell$ ist, folgendes für alle Strukturen $\mathfrak{A}$, alle Tupel $\vec{a}$ und alle Relationen $R_1^{\mathfrak{A}} \subseteq R_1'^{\mathfrak{A}}, \ldots, R_k^{\mathfrak{A}} \subseteq R_k'^{\mathfrak{A}}$ und $S_1^{\mathfrak{A}} \supseteq S_1'^{\mathfrak{A}}, \ldots, S_\ell^{\mathfrak{A}} \supseteq S_\ell'^{\mathfrak{A}}$ über dem Universum von A gilt: Falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{R}^{\mathfrak{A}}, \vec{S}^{\mathfrak{A}}]$, so auch $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{R}'^{\mathfrak{A}}, \vec{S}'^{\mathfrak{A}}]$.
Details: *Übung*. □

Die *kleinste Fixpunktlogik* ist analog zur monotonen Fixpunktlogik definiert, mit dem Unterschied, dass man jetzt an Stelle der Monotonie fordert, dass Formeln $\varphi(R, \vec{x})$, auf die der Fixpunktoperator $\mathbf{lfp}(\cdot)$ angewandt werden soll, *positiv* in R sind.

4.16 ~~2.28~~ **Definition** (Kleinste Fixpunktlogik LFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge LFP[σ] ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (LFP) definiert:

(LFP) Ist $\varphi(R, \vec{x})$ eine LFP[σ]-Formel, wobei

- R eine k-stellige Relationsvariable, für ein $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$,
- $\vec{x} = x_1, .., x_k$ ein Tupel aus k verschiedenen Variablen erster Stufe, und
- φ außer R und $\vec{x}$ evtl. noch andere freie Variablen hat,

ist $\vec{t} = t_1, .., t_k$ ein k-Tupel aus Variablen erster Stufe und/oder Konstantensymbolen aus σ, und ist ***φ positiv in R***, so ist

$$[\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\, \varphi](\vec{t})$$

eine LFP[σ]-Formel.

Die *Semantik* der LFP-Formeln ist genauso definiert wie die Semantik von MFP.

4.17
~~2.29~~ **Beispiele.** (a) *Erreichbarkeit:*

Sei $G = (V, E, s, t)$ ein Graph mit zwei ausgezeichneten Knoten s, t. Dann gilt

$$G \models \big[\mathbf{lfp}_{R,x}\,(x = s \ \vee\ \exists z\,(R(z) \wedge E(z,x)))\big](t)$$

genau dann, wenn es in G einen Pfad von s nach t gibt.

Dies sieht man, indem man die einzelnen Stufen $R^0, R^1, R^2, \ldots$ des Operators $F_{\varphi,G}$ ausrechnet. Per Induktion nach i erhält man so für obige Beispielformel:

$$R^i \ = \ \{v \in V \ : \ \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} < i \text{ von } s \text{ nach } v\}.$$

Daher gilt für $\mathbf{lfp}(F_{\varphi,G}) = R^\infty$:

$$R^\infty \ = \ \{v \in V \ : \ \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad von } s \text{ nach } v\}.$$

(b) *Graphzusammenhang:*

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann gilt

$$G \models \forall x\, \forall y\, \big[\mathbf{lfp}_{R,x,y}\, x = y \ \vee\ \exists z\, \big(R(x,z) \wedge E(z,y)\big)\big](x,y)$$

genau dann, wenn G zusammenhängend ist.
Für die einzelnen Stufen gilt hier in jedem Graphen G:

$$R^i \ = \ \{(u,v) \in V^2 \ : \ \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge} < i \text{ von } u \text{ nach } v\}.$$

(c) *Eine definierbare Wortsprache:*

Sei $\sigma = \{<, P_a, P_b\}$ die Signatur, mit der Wörter $w \in \{a,b\}^*$ als σ-Strukturen $\mathfrak{A}_w$ kodiert werden (siehe Übungsblatt 1).
Wir definieren nun eine Formel $\varphi(R, x)$, die positiv in R ist, so dass für alle nicht-leeren Worte $w = w_0 \cdots w_{n-1} \in \{a,b\}^*$ gilt:

$\mathfrak{A}_w \models [\mathbf{lfp}_{R,x}\,\varphi](i) \iff$ an Position i steht in w der Buchstabe a und auf den Positionen $0, \ldots, i$ steht eine *ungerade* Anzahl von as.

Wenn wir φ so gewählt haben, gilt für jedes Wort w:

$$\mathfrak{A}_w \ \models \ \forall x\Big(\underbrace{\big(P_a(x) \wedge \neg\exists y\,(P_a(y) \wedge x < y)\big)}_{x \text{ ist die Position des letzten } a\text{s in } w} \rightarrow \neg[\mathbf{lfp}_{R,x}\,\varphi](x)\Big)$$

genau dann, wenn die Anzahl der as in w gerade ist.

Wahl der Formel $\varphi(R, x)$:

$$\begin{aligned}\varphi(R,x) \;:=\; & \Big(P_a(x) \wedge \neg\exists y\,(P_a(y) \wedge y < x)\Big) \vee \\ & \Big(\exists z\,\exists y\,\big(\,R(z) \wedge P_a(y) \wedge P_a(x) \wedge (z < y < x) \wedge \\ & \qquad \forall u\,\big((\neg(z < u < y \vee y < u < x)) \vee P_b(u)\big)\,\big)\Big).\end{aligned}$$

4.18 ~~2.30~~ **Lemma.**
Die Datenkomplexität des Auswertungsproblems für LFP *auf* Fin *liegt in* PTIME.

Beweis: Per Induktion über den Formelaufbau. Der einzige interessante Fall ist der Fixpunktoperator

$$\psi \;:=\; [\mathbf{lfp}_{R,\vec{x}}\,\varphi](\vec{t}).$$

Nach Induktionsannahme kann die Formel φ für jede Induktionsstufe R^i in polynomieller Zeit ausgewertet werden. Die Behauptung folgt damit aus Proposition ~~2.21~~. 4.9 . □

4.3 ~~2.2.3~~ Inflationäre Fixpunktlogik

Bei der Definition der *kleinsten Fixpunktlogik* wurde durch ein syntaktisches Kriterium (nämlich dadurch, dass die Formel $\varphi(R, \vec{x})$ *positiv* in R sein muss), gewährleistet, dass die Sequenz $R^0, R^1, R^2, ..$ der Induktionsstufen *induktiv* ist, d.h.

$$R^0 \subseteq R^1 \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^i \subseteq R^{i+1} \subseteq \cdots,$$

und daher der induktive Fixpunkt $R^\infty = R^{\mathrm{cl}(F)}$ existiert.
In diesem Abschnitt werden wir die Bedingung "$\varphi(R, \vec{x})$ positiv in R" fallenlassen und stattdessen durch explizites Vereinigen erzwingen, dass jede Induktionsstufe ihre gesamte Vorgängerstufe enthält.

4.19 ~~2.31~~ **Definition** (Inflationärer Fixpunkt $\mathbf{ifp}(F)$). Zu jeder endlichen Menge A und jeder Abbildung $F : \mathrm{Pot}(A) \to \mathrm{Pot}(A)$ ist die Abbildung I_F wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} I_F \;:\; \mathrm{Pot}(A) \;&\to\; \mathrm{Pot}(A) \\ X \;&\mapsto\; X \cup F(X). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist I_F *inflationär* und hat daher einen induktiven Fixpunkt $R^\infty = R^{\mathrm{cl}(I_F)}$.
R^∞ heißt der *inflationäre Fixpunkt von* F, geschrieben $\mathbf{ifp}(F)$.

4.20 ~~2.32~~ **Bemerkung.** Falls F *monoton* ist, so haben F und I_F die gleichen Induktionsstufen, und es gilt $\mathbf{ifp}(F) = \mathbf{lfp}(F)$.

4.21 ~~2.33~~ **Definition** (Inflationäre Fixpunktlogik IFP). Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge IFP$[\sigma]$ ist induktiv durch die Regeln (A1),(A2),(A3),(BC) und (Q1) der Logik erster Stufe, sowie die folgende Regel (IFP) definiert: