125

Wie dieses Beispiel zeigt, gibt es Strukturklassen, die schon in der 3-Variablen-Logik $L^3_{\infty\omega}$ definiert werden können, die aber nicht in FO definierbar sind (mit beliebig vielen Variablen). Wie der nächste Satz allerdings zeigt, können zwei *endliche* Strukturen, die in $L^k_{\infty\omega}$ unterschieden werden können, auch schon in FO^k unterschieden werden.

3.29 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, σ eine Signatur und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv_{\text{FO}^k} \mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$), falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben $\text{FO}^k[\sigma]$-Sätze (bzw. $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Sätze) erfüllen.

3.30 Satz. *Für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt:* $\mathfrak{A} \equiv_{\text{FO}^k} \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$": klar, da $\text{FO}^k \subseteq L^k_{\infty\omega}$.
"$\Longrightarrow$": Per Induktion nach dem Aufbau von $L^k_{\infty\omega}$ zeigen wir, dass es zu jeder $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel $\varphi(\vec{x})$ eine $\text{FO}^k[\sigma]$-Formel $\tilde{\varphi}(\vec{x})$ gibt, so dass für alle $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]. \tag{3.7}$$

Der einzige nicht-triviale Fall ist, dass φ von der Form $\bigvee \Psi$ oder $\bigwedge \Psi$ ist, wobei Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln ist. Wir betrachten hier den Fall $\bigvee \Psi$, der andere ist dann analog.

Sei also Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln und $\varphi := \bigvee \Psi$. Für jedes $\vec{a} \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ wähle eine Formel $\psi_{\vec{a}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$. Analog wähle für jedes $\vec{b} \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}]$ eine Formel $\psi_{\vec{b}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{B} \models \psi_{\vec{b}}[\vec{b}]$. Nun definieren wir

$$\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} := \{ \psi_{\vec{a}} : \vec{a} \in A \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \} \cup \{ \psi_{\vec{b}} : \vec{b} \in B \text{ und } \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \}.$$

Nach Konstruktion ist $\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ eine *endliche* Teilmenge von Ψ. Weiterhin gilt für alle $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$:

$$\mathfrak{A} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \bigvee \Psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$$

sowie

$$\mathfrak{B} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \bigvee \Psi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}].$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung ist jede Formel $\psi \in \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel in FO^k. Also ist auch $\bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}$ in FO^k. Es gilt also für alle $\vec{a} \in A$ und $\vec{b} \in B$: $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}]$ und $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]$. Somit ist (3.7) gezeigt. Aus (3.7) folgt insbesondere folgendes: Falls es einen $L^k_{\infty\omega}$-Satz φ gibt, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet, so gibt es auch einen FO^k-Satz, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet. Dies schließt den Beweis von "$\Longrightarrow$" ab. □

3.4.3 Pebble-Spiele

Ziel dieses Abschnitts ist es, Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Logiken FO^k und $L^k_{\infty\omega}$ einzuführen. Dazu zunächst ein paar Notationen.

Der Einfachheit halber werden wir in diesem Abschnitt nur Signaturen betrachten, die *keine Konstantensymbole* enthalten. Solche Signaturen nennen wir *relationale Signaturen*.

3.52 Notation. Sei σ eine relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen.

- Wir vereinbaren, dass das Symbol "$*$" in keinem Universum einer Struktur vorkommt.
- Für $\vec{a} := a_1, .., a_k \in (A \dot{\cup} \{*\})^k$ definieren wir den *Träger* $\mathrm{Tr}(\vec{a})$ *von* $\vec{a}$ als
$$\mathrm{Tr}(\vec{a}) \;:=\; \{i : a_i \neq *\}.$$
- Für $i \in \{1, .., k\}$, $a \in A$ und $\vec{a} := (a_1, .., a_k) \in (A \cup \{*\})^k$ setzen wir
$$\vec{a}\tfrac{a}{i} \;:= \big(a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_k\big).$$
Das heißt, wir ersetzen die i-te Stelle von $\vec{a}$ durch a.
- Für $\vec{a} = a_1, .., a_k \in (A \cup \{*\})^k$ schreiben wir $\vec{a}_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ um das Tupel über A zu bezeichnen, das aus $\vec{a}$ durch Löschen der "$*$"-Symbole entsteht.
- Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$ schreiben wir $(\vec{a} \mapsto \vec{b})_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ um die Abbildung $\big(\vec{a}_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})} \mapsto \vec{b}_{|\mathrm{Tr}(\vec{b})}\big)$ zu bezeichnen.

3.53 Definition (k-partieller Isomorphismus). Sei σ eine relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, und seien $\vec{a} \in (A \cup \{*\})^k$ und $\vec{b} \in (B \cup \{*\})^k$. Die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ heißt *k-partieller Isomorphismus von* $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$, falls

(1) $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$ und

(2) $(\vec{a} \mapsto \vec{b})_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

~~$\mathrm{Part}^k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnet die Menge aller k-partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.~~

Man beachte, dass der Definitionsbereich jedes k-partiellen Isomorphismus höchstens k Elemente enthält.

Wir sind nun bereit, die Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Logiken FO^k und $L^k_{\infty\omega}$ einzuführen.

3.54 Definition (Pebble-Spiele). Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Seien $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\vec{a} \in (A \dot{\cup} \{*\})^k$ und $\vec{b} \in (B \dot{\cup} \{*\})^k$ mit $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$.

Das *k-Pebble-Spiel* $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ wird zwischen zwei Spielern, Spoiler und Duplicator, gespielt. Den Spielern stehen insgesamt $2{\cdot}k$ Spielsteine $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k$ zur Verfügung, die auf Elemente der Strukturen gelegt werden können. Zu Beginn des Spiels liegt für jedes $i \in \mathrm{Tr}(\vec{a})$ der Stein α_i auf dem Element a_i und β_i auf b_i. Die übrigen Steine liegen "nebem dem Spielbrett".

Eine Partie des Spiels besteht aus einer unbegrenzten Anzahl von Runden. In jeder Runde wählt Spoiler zunächst ein beliebiges $i \in \{1, .., k\}$ und nimmt entweder den Stein α_i und legt ihn auf ein beliebiges Element in A, oder er nimmt Stein β_i und legt ihn auf ein beliebiges Element in B. Duplicator antwortet, indem er den entsprechenden Stein (also β_i oder α_i) auf ein beliebiges Element in der anderen Struktur legt. D.h., Duplicator legt Stein β_i auf ein Element in B, falls Spoiler den Stein α_i gelegt hat; bzw. Duplicator legt Stein α_i auf ein Element in A, falls Spoiler den Stein β_i gelegt hat. Beachte:

127

- Steine, die bereits auf dem Spielfeld liegen, dürfen wiederverwendet werden.
- Es dürfen durchaus mehrere Steine auf demselben Element liegen.

Am Ende jeder Runde wird entschieden, ob Spoiler gewonnen hat (und das Spiel beendet ist) oder ob weitergespielt wird. Dazu seien $\vec{a} = (a_1, .., a_k) \in (A \cup \{*\})^k$ die am Ende der Runde durch die Steine $\alpha_1, .., \alpha_k$ in $\mathfrak{A}$ markierten Elemente (mit $a_j = *$ falls der Stein α_j noch "neben dem Spielbrett" liegt), und $\vec{b} = (b_1, .., b_k) \in (B \cup \{*\})^k$ seien die entsprechenden durch die Steine $\beta_1, .., \beta_k$ in $\mathfrak{B}$ markierten Elemente. Ist die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ *kein* k-partieller Isomorphismus, so endet das Spiel nach dieser Runde und *Spoiler gewinnt*. Andernfalls wird das Spiel mit einer weiteren Runde fortgesetzt.

Duplicator gewinnt, wenn unendlich lange gespielt wird, also nach jeder Runde die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ ein k-partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

Bemerkung:

- Ist $\vec{a} = \vec{b} = \vec{*} = *, .., *,$ so schreiben wir $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{*}, \mathfrak{B}, \vec{*})$.
- Strategien und Gewinnstrategien im k-Pebble-Spiel sind analog zum herkömmlichen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel definiert und werden daher hier nicht mehr formal eingeführt.
- Sind die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *endlich*, so gibt es nur eine endliche Zahl verschiedener Spielpositionen $(\vec{a}, \vec{b}) \in (A \cup \{*\})^k \times (B \cup \{*\})^k$. In diesem Fall steht also schon nach einer *endlichen* Zahl von Zügen fest, wer das Spiel gewinnen kann.

3.34 Beispiele. (a) Sei $\sigma := \varnothing$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen mit $|A|, |B| \geqslant k$. Dann hat *Duplicator* eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem er immer wenn Spoiler zwei Steine auf dasselbe Element legt ebenso zieht und ansonsten immer ein neues Element mit einem Stein belegt. Da es nicht mehr Steine als Elemente in den Strukturen gibt, kann er dies immer sicherstellen.

(b) Ist $\sigma = \varnothing$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind σ-Strukturen mit $|A| < k$ und $|B| \neq |A|$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(c) Seien jetzt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche, linear geordnete $\{<\}$-Strukturen. Dann hat Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}^2_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn $|A| = |B|$. Dies kann man folgendermaßen sehen:

Gilt $|A| = |B|$ so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei endliche lineare Ordnungen gleicher Kardinalität und somit isomorph. Folglich hat Duplicator eine Gewinnstratgie, indem er immer zu Spoilers Wahl isomorphe Elemente wählt.

Gilt $|A| \neq |B|$ und o.B.d.A $|A| > |B|$, so hat Spoiler eine Gewinnstratgie in $\mathcal{G}^2_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem er in jeder Runde $r \geqslant 1$ den Stein $\alpha_{1+(r-1 \bmod 2)}$ auf das Element mit Rang $r-1$ in $\mathfrak{A}$ legt.

In den ersten beiden Runden legt Spoiler also seine beiden Spielsteine α_1, α_2 auf die beiden kleinsten Elemente in $\mathfrak{A}$. In den folgenden Runden nimmt er jeweils den Stein auf dem kleineren Element und plaziert ihn auf das kleinste noch nicht im Spiel verwendete Element. Nach jeder Runde r liegen also die Steine α_1, α_2 auf den Elemeten mit Rang $r-2$ und $r-1$. Auf diese Weise werden im Verlauf des Spiels alle Elemente von $\mathfrak{A}$ in ihrer Reihenfolge gemäß der Ordnung durchlaufen.

Duplicator muss nun ebenfalls in jedem Zug den Stein auf dem kleineren der beiden Elemente in $\mathfrak{B}$ auf ein größeres legen, denn ansonsten wäre die Abbildung $\alpha_1, \alpha_2 \mapsto \beta_1, \beta_2$ kein k-partieller Isomorphismus und Duplicator hätte verloren. Da aber $|B| < |A|$ ist, kann Duplicator dies nach spätestens $|B|$ Runden nicht mehr gewährleisten und verliert daher das Spiel.

Analog zum Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé werden wir nun den Zusammenhang zwischen Pebble-Spielen und der Logik $L^{\omega}_{\infty\omega}$ herstellen. ~~Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Variante von Hin-und-Her Systemen (vgl. Definition 3.32).~~

3.56 Definition. Sei σ eine relationale Signatur und $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *k-partiell isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong^k_{\text{part}} \mathfrak{B}$), falls es eine *nicht-leere* Menge I k-partieller Isomorphismen gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

k-Hin-Eigenschaft: Für alle $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$, alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $(\vec{a}\frac{a}{i} \mapsto \vec{b}\frac{b}{i}) \in I$.

k-Her-Eigenschaft: Für alle $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$, alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$, so dass $(\vec{a}\frac{a}{i} \mapsto \vec{b}\frac{b}{i}) \in I$.

Ein System mit diesen Eigenschaften nennen wir *k-Hin-und-Her-System*. Wir schreiben $I : \mathfrak{A} \cong^k_{\text{part}} \mathfrak{B}$ um anzudeuten, dass I ein k-Hin-und-Her-System zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist.

3.57 Bemerkung. Die Menge

$$W^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \left\{ (\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in \mathrm{Part}^k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \;:\; \begin{array}{l} \text{Duplicator hat eine Gewinnstrategie im} \\ k\text{-Pebble-Spiel } \mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \end{array} \right\}$$

hat die k-Hin-und-Her-Eigenschaft, ist aber möglicherweise leer.

3.25 Theorem. *Sei σ eine relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen, $\vec{a} \in (A \cup \{*\})^k, \vec{b} \in (B \cup \{*\})^k$ mit $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$.

~~*(b) $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in W^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $W^k_\infty : \mathfrak{A} \cong^k_{part} \mathfrak{B}$.*~~

~~*(c) Es gibt ein k-Hin-und-Her-System $I : \mathfrak{A} \cong^k_{part} \mathfrak{B}$ mit $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$.*~~

(b) $\vec{a}$ in $\mathfrak{A}$ und $\vec{b}$ in $\mathfrak{B}$ erfüllen dieselben $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln, d.h.

$$(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{L^k_{\infty\omega}} (\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Beweis: Übung.

Beispiel 3.36

Aus Theorem 3.35 und Beispiel 3.34(a) folgt direkt für $\sigma = \emptyset$, $k \geq 1$ und beliebige σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $|A|, |B| \geq k$, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Sätze erfüllen.

Analog zu Lemma 3.7 können wir unter Verwendung des k-Pebble-Spiels Folgendes zeigen:

Lemma 3.37

Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$ und $m \geq 0$ mit $m \leq \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen genau die gleichen $L^k_{\infty\omega}[E]$-Sätze.

Beweis: Übung.

Indem man im Beweis von Theorem 3.8 (0-1-Gesetz für FO bzgl UG) Lemma 3.37 an Stelle von Lemma 3.7 verwendet, erhält man:

Theorem 3.38 (Kolaitis und Vardi, 1990)

$L^{\omega}_{\infty\omega}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl der Klasse UG aller ungerichteten Graphen.

Beweis: (fast wörtlich übernommener Beweis von Theorem 3.8).

Sei φ ein $L^{\omega}_{\infty\omega}[E]$-Satz und sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der in φ vorkommenden Variablen.

Fall 1: F.a. $G = (V, E) \in UG$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$ gilt: $G \not\models \varphi$, d.h. $G \models \neg\varphi$

Dann gilt f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$:

$$\mu_n(\neg\varphi \mid UG) \geq \mu_n(EA_k \mid UG) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(Satz 3.4)

Somit gilt $\mu(\neg\varphi \mid UG) = 1$,

d.h. $\mu(\varphi \mid UG) = 0$.

Fall 2: "Fall 1 gilt nicht", d.h.:

Es gibt ein $G = (V, E) \in UG$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \not\models EA_k$ und $G \models \varphi$.

Behauptung: F.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$ gilt:

$\mu_n(\varphi | UG) \geq \mu_n(EA_k | UG)$

Klar: Daraus folgt, dass $\mu(\varphi | UG) \geq \mu(EA_k | UG)$

Und wegen Satz 3.4 ("$\mu(EA_k | UG) = 1$") folgt

daher: $\mu(\varphi | UG) = 1$

Beweis der Behauptung:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$

Sei $G' = (V', E') \in UG_n$ mit $G' \models EA_k$

Beachte: Es reicht, zu zeigen, dass $G' \models \varphi$, denn daraus folgt:

$\mu_n(\varphi | UG) \geq \mu_n(EA_k | UG)$

Situation: $G, G' \models EA_k$, $|V|, |V'| \geq 2k$

Gemäß Beobachtung 3.3 gilt:

$G, G' \models EA_{\ell, m}$ f.a. $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$.

Gemäß Lemma 3.37 erfüllen G und G' die gleichen $L^k_{\infty\omega}[E]$-Sätze.

Wegen $\varphi \in L^k_{\infty\omega}[E]$ und $G \models \varphi$ folgt $G' \models \varphi$

$\square$

Genauso lässt sich auch Folgendes analog zu Theorem 3.9 zeigen:

Theorem 3.39 (Kolaitis und Vardi, 1990)

Für jede endliche relationale Signatur σ gilt: $L^{\omega}_{\infty\omega}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse ALL(σ) aller σ-Strukturen.

Folgerung 3.40

In Beispiel 3.1 hatten wir gezeigt, dass

$\mu(\text{EVEN} \mid \text{ALL})$ = undefiniert und

$\mu(\text{PARITY} \mid \text{ALL}) = \frac{1}{2}$

ist.

Aus Theorem 3.39 folgt daher, dass

EVEN nicht $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in ALL ist

und dass

PARITY nicht $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in ALL ist.

Es ist bekannt (hier ohne Beweis),

dass

$$\mu(\text{HAMILTONKREIS} \mid UG) = 1$$

D.h. unter Verwendung des 0-1-Gesetzes für $L^{\omega}_{\infty\omega}$ bzgl UG lässt sich nicht zeigen, dass es keinen $L^{\omega}_{\infty\omega}[E]$-Satz gibt, der in genau denjenigen Graphen gilt, die einen Hamiltonkreis besitzen. Unter Verwendung des Pebble-Spiels lässt sich dies allerdings nachweisen:

<u>Satz 3.41</u> (de Rougemont, 1987)

HAMILTONKREIS ist <u>nicht</u> $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in der Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen

<u>Beweis:</u>

Angenommen, HAMILTONKREIS wäre durch einen $L^{k}_{\infty\omega}[E]$-Satz definierbar, für eine Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

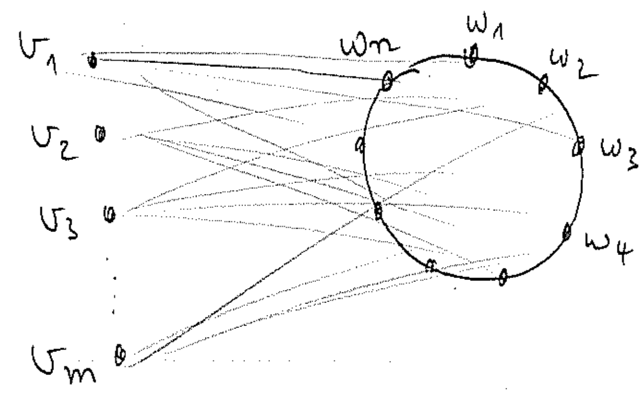
<u>Ziel:</u> Finde ungerichtete Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die gilt:

- $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamiltonkreis,
- $\mathfrak{B}$ nicht, und
- Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

<u>Beachte:</u> Mit Theorem 3.35 folgt dann, dass $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$, und wir sind fertig

Idee zur Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

Für $m, n \geq 1$ betrachte den Graphen $G_{m,n}$:



Jedes v_i ist mit jedem w_j durch eine Kante verbunden

<u>Behauptung 1:</u>
$G_{m,n}$ besitzt einen Hamiltonkreis $\iff m \leq n$

<u>Beweis:</u> Übung

Wähle $\mathfrak{A} := G_{k,k}$

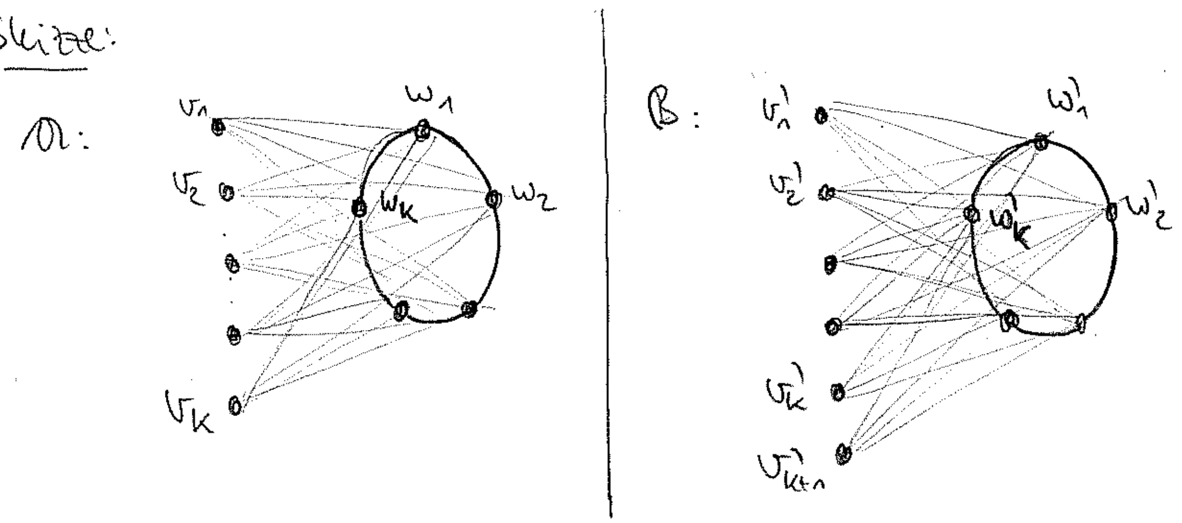
und $\mathfrak{B} := G_{k+1,k}$

Gemäß Behauptung 1 gilt: $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamiltonkreis; $\mathfrak{B}$ nicht. Mit der folgenden Behauptung 2 erreichen wir also unser Ziel.

<u>Behauptung 2:</u>
Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

<u>Beweis:</u>

<u>Skizze:</u>



<u>Idee:</u>
- Auf den beiden (isomorphen) Kreisen spielt Duplicator gemäß dem Isomorphismus (dh: antwortet mit w_j', falls Spoiler w_j wählt)
- Auf den "isolierten" Knoten $v_1, \ldots, v_k$ bzw $v_1', \ldots, v_{k+1}'$ spielt Duplicator gemäß der Strategie auf Mengen (dh Strukturen über der leeren Signatur $\sigma = \emptyset$).

<u>Details:</u> Übung.

□