3.3 Der Rado-Graph

Richard Rado (1906–1989): dt-britischer Mathematiker

Definition 3.11

Der Rado-Graph (auch: Zufallsgraph, Erdös-Rényi-Graph) ist der unendliche, ungerichtete Graph $RG = (V^{RG}, E^{RG})$ mit Knotenmenge $V^{RG} = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, so dass f.a. $i, j \in \mathbb{N}$ gilt: es gibt eine Kante zwischen Knoten i und Knoten j $\iff$ das i-te Bit der Binärrepräsentation von j ist 1, dh $\left\lfloor \frac{j}{2^i} \right\rfloor$ ist ungerade

(wobei für $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\lfloor r \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$)

Bemerkung 3.12: Der Rado-Graph wird auch Zufallsgraph genannt, da man zeigen kann, dass die folgende randomisierte Konstruktion mit Wahrscheinlichkeit 1 einen zum Rado-Graphen isomorphen Graphen liefert: Die Knotenmenge sei $\mathbb{N}$, und für alle

$i,j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entschieden, ob es eine Kante zwischen i und j gibt.

<u>Beobachtung 3.13</u>

Der Rado-Graph erfüllt die Erweiterungsaxiome $EA_{l,m}$ für alle $l \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq l$.

<u>Beweis:</u> Zu zeigen: $RG \models EA_{l,m}$.

Seien $x_1, \ldots, x_l$ l paarweise verschiedene Elemente in $V^{RG} = \mathbb{N}$.

Sei $S := \{x_1, \ldots, x_l\}$, $T := \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $T' := S \setminus T = \{x_{m+1}, \ldots, x_l\}$.

Wir suchen ein $z \in \mathbb{N}$, s.d. gilt:

- das x_i-te Bit von z ist 1, f.a. $x_i \in T$
- das x_i-te Bit von z ist 0, f.a. $x_i \in T'$
- $z \notin T \cup T' = \{x_1, \ldots, x_l\}$.

Dann können wir z.B. wählen:

$$z := \sum_{x_i \in T} 2^{x_i} + 2^{max+1}$$

wobei $max := \max\{x_1, \ldots, x_l\}$.

$\square$

Theorem 3.14

Jeder abzählbare, ungerichtete Graph G, der alle Erweiterungsaxiome $EA_{\ell,m}$ für $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $\ell \leq m$ erfüllt, ist isomorph zum Rado-Graphen.

Beweis: Das Theorem folgt direkt aus den beiden folgenden Behauptungen.

Behauptung 1: Sei G ein ungerichteter Graph mit $G \models EA_{\ell,m}$ f.a. $\ell \geq 1, m \geq 0$ mit $\ell \leq m$.
Dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im ω-Runden EF-Spiel auf G und RG (kurz: $G \equiv_\omega RG$), d.h. Duplicator kann beliebig viele Runden des EF-Spiels auf G, RG so spielen, dass nach jeder Runde $i \in \mathbb{N}$ die in den ersten i Runden gewählten Knoten $a_1, \ldots, a_i$ und $b_1, \ldots, b_i$ einen partiellen Isomorphismus von G auf RG liefern.

Beweis:
Genau wie im Beweis von Lemma 3.7 liefern die Erweiterungsaxiome eine Gewinnstrategie für Duplicator.
Details: Übung.

$\square_{\text{Beh 1}}$

Behauptung 2

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei abzählbare σ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \equiv_\omega \mathfrak{B}$.
Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.

Beweis:
Sei $(c_j)_{j\geq 1}$ eine Aufzählung aller Elemente in A, und sei $(d_j)_{j\geq 1}$ eine Aufzählung aller Elemente in B.
Wir lassen Spoiler das ω-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wie folgt spielen:

- In Runde 1 wählt Spoiler $a_1 := c_1$
- In jeder ungeraden Runde $i \geq 3$ wählt Spoiler als a_i dasjenige Element $c_j \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ mit minimalem Index j
- In jeder geraden Runde $i \geq 2$ wählt Spoiler als b_i dasjenige Element $d_j \in B \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$ mit minimalem Index j.

Wenn Duplicator gemäß seiner Gewinnstrategie im ω-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ antwortet, dann gilt für die Abbildung π mit

$$\pi(a_i) = b_i \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N}_{\geq 1}:$$

- π ist eine Bijektion von A auf B, und
- f.a. $R \in \sigma$, für $r := ar(R)$, und f.a. $x_1, \ldots, x_r \in A$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

$\square_{\text{Beh 2}}$

$\square_{\text{Theorem 3.14}}$

Definition 3.15

Sei $EA := \{ EA_{\ell,m} : \ell \geq 1, m \geq 0, m \leq \ell \}$

Satz 3.16

Für jeden $FO[E]$-Satz φ gilt:

$EA \models \varphi$ oder $EA \models \neg\varphi$.

Beweis:

Angenommen, φ ist ein FO[E]-Satz, für den gilt: $EA \nvDash \varphi$ und $EA \nvDash \neg\varphi$

Somit ist sowohl $EA \cup \{\neg\varphi\}$ als auch $EA \cup \{\varphi\}$ erfüllbar.

Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem (vgl. Satz 8.10 in der Vorlesung "Logik in der Informatik – Einführung in die formale Logik") besitzt jede abzählbare, erfüllbare Formelmenge ein abzählbares Modell.

Somit besitzen die abzählbaren, erfüllbaren Formelmengen $EA \cup \{\neg\varphi\}$ und $EA \cup \{\varphi\}$ abzählbare Modelle $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

D.h.: $\mathfrak{A} \models EA$, $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$, $\mathfrak{B} \models EA$, $\mathfrak{B} \models \varphi$.

Gemäß Theorem 3.14 gilt:

$\mathfrak{A} \cong RG$ und $\mathfrak{B} \cong RG$.

Somit gilt: $RG \models \varphi$ und $RG \models \neg\varphi$. $\lightning$

Widerspruch.

$\square$

Definition 3.17

Die Theorie des Rado-Graphen Th(RG) ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Th}(RG) := \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[E]\text{-Satz mit } RG \models \varphi \}$$

Aus Beobachtung 3.13 und Satz 3.16 folgt direkt:

Folgerung 3.18

Th(RG) wird von EA axiomatisiert, d.h. es gilt:

$$\mathrm{Th}(RG) = \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[E]\text{-Satz mit } EA \models \varphi \}$$

Satz 3.19

Th(RG) ist entscheidbar,
d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines FO[E]-Satzes φ nach endlich vielen Schritten anhält und entscheidet, ob $RG \models \varphi$ oder $RG \not\models \varphi$.

Beweis:

Aus Korollar 10.2 der Vorlesung "Logik in der Informatik – Einführung in die formale Logik" wissen wir, dass jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie entscheidbar ist.

Es reicht also zu zeigen, dass Th(RG) vollständig und effektiv axiomatisierbar ist.

Offensichtlicherweise ist Th(RG) vollständig

(Zur Erinnerung: Eine Theorie T ist eine unter der semantischen Folgerungsbeziehung abgeschlossene Menge von FO[σ]-Sätzen; sie heißt vollständig, wenn für jeden FO[σ]-Satz φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$.

Insbesondere ist für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ Th($\mathfrak{A}$) eine vollständige Theorie).

Außerdem wird Th(RG) durch EA axiomatisiert, und die Menge EA ist offensichtlicherweise entscheidbar (d.h. insbes.: Th(RG) ist effektiv axiomatisierbar).

$\square$

Satz 3.20

(a) Für jeden FO[E]-Satz φ gilt:

$$RG \models \varphi \iff \mu(\varphi \mid UG) = 1$$

(b) Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines FO[E]-Satzes φ entscheidet, ob $\mu(\varphi \mid UG) = 1$ ist.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Es gelte $RG \models \varphi$.

Wegen $RG \models EA$ und Satz 3.16 gilt $EA \models \varphi$.

Gemäß Kompaktheitssatz (vgl. Satz 8.1 in der Vorlesung "Logik in der Informatik – Einführung in die formale Logik") gibt es eine endliche Menge $\Gamma \subseteq EA$ mit $\Gamma \models \varphi$.

Sei $\eta := \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Beachte: $\Gamma \models \varphi$ bedeutet, dass $\eta \models \varphi$.

Aus Korollar 3.5 (a) ("$\mu(EA_{e,m} \mid UG) = 1$") folgt direkt, dass $\mu(\eta \mid UG) = 1$

Wegen $\eta \models \varphi$, folgt: $\mu(\varphi \mid UG) = 1$ ✓

"$\Leftarrow$" Es gelte $RG \not\models \varphi$

D.h. $RG \models \neg\varphi$. Gemäß "$\Rightarrow$" gilt dann

$\mu(\neg\varphi \mid UG) = 1$, d.h. $\mu(\varphi \mid UG) = 0$.

(b) Folgt direkt aus (a) und Satz 3.19.

$\square$

Bemerkung 3.21:

Satz 3.20 (b) besagt:

Es ist entscheidbar, ob ein gegebener FO[E]-Satz φ in fast allen endlichen ungerichteten Graphen gilt.

Zum Vergleich dazu beacht, dass aus dem Satz von Trakhtenbrot folgt:

Es ist nicht entscheidbar, ob ein gegebener FO[E]-Satz φ in allen endlichen ungerichteten Graphen gilt.

(tatsächlich ist dieses Problem nicht einmal semi-entscheidbar).

Das obige Theorem besagt, dass Graph-Zusammenhang nicht in $Mon\text{-}\Sigma_1^1$ definierbar ist. In der monadischen *universellen* Logik zweiter Stufe $Mon\text{-}\Pi_1^1$ kann Graph-Zusammenhang allerdings leicht definiert werden (siehe Beispiel 2.5 (b)).

Des Weiteren ist Graph-Zusammenhang ein Problem, das zur Klasse NP gehört (es gehört sogar zur Klasse PTIME) und kann daher nach dem Satz von Fagin (Theorem 2.8) auch durch eine ESO-Formel beschrieben werden. Zusammen mit Bemerkung 3.39 erhalten wir also:

$$\mathrm{FO} < Mon\text{-}\Sigma_1^1 < \mathrm{ESO} \quad \text{auf Fin.}$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass sich natürlich leicht eine Variante des Ajtai-Fagin Spiels finden lässt, die an Stelle der $Mon\text{-}\Sigma_1^1$-Definierbarkeit allgemein ESO-Definierbarkeit charakterisiert: an Stelle einer gegebenen Zahl l (die angibt, wie viele 1-stellige Relationen in den Phasen 1 und 2 gewählt werden) brauchen wir dazu nur eine Liste $(s_1, \ldots, s_l)$ von Zahlen zu betrachten, die angibt, dass in den Phasen 1 und 2 des Spiels Relationen der Stelligkeiten $s_1, \ldots, s_l$ gewählt werden.

3.4 ~~Pebble-Spiele und~~ Infinitäre Logiken

In diesem Abschnitt werden wir sogenannte *infinitäre* Logiken behandeln, d.h. Logiken, deren Formeln unendliche Länge haben können. Solche Logiken werden vor allem im Bereich der unendlichen Modelltheorie untersucht. Für die endliche Modelltheorie, mit der wir uns hier beschäftigen, werden sie sich in ihrer allgemeinen Form als zu ausdrucksstark herausstellen. Schränkt man hingegen die Anzahl der erlaubten Variablen ein, so erhält man schwächere Logiken, die für die endliche Modelltheorie wichtige Erkenntnisse liefern.

3.4.1 Die infinitäre Logik $L_{\infty\omega}$

3.42 Definition. Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge $L_{\infty\omega}[\sigma]$ ist induktiv wie folgt definiert.

- $L_{\infty\omega}[\sigma]$ enthält alle atomaren σ-Formeln.
- Ist φ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel, so ist auch $\neg\varphi$ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel.
- Ist φ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel und ist x eine Variable erster Stufe, so sind auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ Formeln in $L_{\infty\omega}[\sigma]$.
- Ist Ψ eine *Menge* von $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln, so sind auch $\bigvee\Psi$ und $\bigwedge\Psi$ Formeln in $L_{\infty\omega}[\sigma]$. (*Beachte:* Hierbei darf Ψ auch unendlich sein.)

Die Semantik der Logik $L_{\infty\omega}$ ist die naheliegende Erweiterung der Semantik für FO. Hierbei wird $\bigvee\Psi$ als Disjunktion über alle Formeln in Ψ und entsprechend $\bigwedge\Psi$ als Konjunktion über alle Formeln in Ψ interpretiert. Das heißt (für eine Satzmenge Ψ), dass $\mathfrak{A} \models \bigvee\Psi$ genau dann gilt, wenn es (mindestens) einen Satz $\psi \in \Psi$ gibt mit $\mathfrak{A} \models \psi$. Analog dazu gilt

$\mathfrak{A} \models \bigwedge \Psi$ genau dann, wenn für jeden Satz $\psi \in \Psi$ gilt $\mathfrak{A} \models \psi$.
Offensichtlich ist $L_{\infty\omega}$ eine Erweiterung der Logik erster Stufe. Wir schauen uns zunächst einige Beispiele für $L_{\infty\omega}$-Formeln an:

3.23 Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei φ_n der FO-Satz

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \ \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i = x_j \ \wedge \ \forall y \bigvee_{i=1}^{n} x_i = y \ \Big),$$

der besagt, dass es genau n Elemente in den Modellen von φ_n gibt. Nun gilt folgendes:

(1) Für jede Signatur σ ist $\psi := \bigvee \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel, die die Klasse aller *endlichen* σ-Strukturen definiert, das heißt: $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\psi) = \mathsf{Fin}$.

(2) Analog definiert der $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Satz $\psi_{\mathsf{Even}} := \bigvee \{\varphi_n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade}\}$ die Klasse aller endlichen Strukturen gerader Kardinalität, das heißt $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\psi_{\mathsf{Even}}) = \mathsf{Even}$, wobei Even die Klasse aller endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ bezeichnet, deren Universum aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht.

Wir wissen bereits, dass die Klasse aller endlichen Strukturen gerader Kardinalität nicht in FO definierbar ist. Die Logik $L_{\infty\omega}$ ist also echt ausdrucksstärker als FO, was angesichts der sehr allgemeinen Definition auch nicht verwundern dürfte.

Wie anfangs erwähnt, spielt die Logik $L_{\infty\omega}$ in der unendlichen Modelltheorie eine wichtige Rolle. Das nächste Beispiel zeigt jedoch, dass sie für die *endliche* Modelltheorie schon zu ausdrucksstark ist, weil einfach *jede* Klasse endlicher Strukturen durch eine $L_{\infty\omega}$-Formel beschrieben werden kann.

3.24 Beispiel. Sei σ eine Signatur und C eine beliebige unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher σ-Strukturen. C wird definiert durch den $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Satz $\varphi_{\mathsf{C}} := \bigvee \{\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in \mathsf{C}\}$, wobei $\varphi_{\mathfrak{A}}$ die FO-Formel aus Proposition 3.2 ist, die die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt. Das heißt: $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\varphi_{\mathsf{C}}) = \mathsf{C}$.

Wie das Beispiel zeigt, ist also jede Klasse endlicher Strukturen in $L_{\infty\omega}$ definierbar. Wir werden daher geeignete Einschränkungen der Logik definieren müssen, um für die endliche Modelltheorie interessante Aussagen treffen zu können.

3.4 Das k-Variablen Fragment von FO und $L_{\infty\omega}$

3.25 Definition (FO^k). Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Die Klasse $\mathrm{FO}^k[\sigma]$ besteht aus allen $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, in denen höchstens k verschiedene Variablen erster Stufe vorkommen.

3.26 Beispiel. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gibt es eine $\mathrm{FO}^2[<]$-Formel $\psi_\ell(x)$, so dass für jede endliche linear geordnete Struktur $\mathfrak{A} := (A, <^{\mathfrak{A}})$ und jedes $a \in A$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi_\ell[a] \iff a$ ist das

ℓ-te Element bezüglich der Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ ist, d.h. $\ell = rg_{<^{\mathfrak{A}}}(a)$. Die Formel ψ_ℓ definieren wir induktiv durch

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &:= \forall y\, \neg y{<}x \\ \psi_{\ell+1}(x) &:= \forall y \Big(y{<}x \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{\ell} \exists x \big(x{=}y \wedge \psi_i(x) \big) \Big). \end{aligned}$$

Die Konstruktion $\exists x\big(x{=}y \wedge \psi_i(x)\big)$ wird benutzt, da ψ_ℓ die Variable x und nicht y als freie Variable enthält.

Die Formel $\psi_{\ell+1}(x)$ besagt, dass alle Elemente $y < x$ höchstens den Rang ℓ in der Ordnung haben können. Also kann x höchstens den Rang $\ell{+}1$ haben. Andererseits kann x keinen Rang $\leqslant \ell$ haben, da andernfalls für $y = x$ die rechte Seite der Biimplikation erfüllt wäre, die linke aber nicht.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass man mit Substitutionen im Zusammenhang mit k-Variablen Logiken vorsichtig sein muss. Substituiert man einfach x durch y in $\psi_i(x)$, so würde, gemäß der Definition von Substitutionen, zunächst die gebunden vorkommende Variable y umbenannt, d.h. durch ein neues Variablensymbol ersetzt, und danach dann jedes frei vorkommende x durch y ersetzt. Hierbei ist aber nicht von vorneherein klar, dass damit nicht mehr als insgesamt zwei Variablen benutzt werden. Daher werden wir im Folgenden Substitutionen im Bezug auf k-Variablen Logiken vermeiden und lieber explizite Variablenumbenennungen verwenden.

Wir definieren nun das entsprechende k-Variablen Fragment der infinitären Logik $L_{\infty\omega}$.

3.48 Definition ($L^k_{\infty\omega}$). Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Die Formelklasse $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$ ist definiert als die Klasse aller $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln, die höchstens k verschiedene Variablen erster Stufe enthalten. Des Weiteren sei $L^\omega_{\infty\omega}[\sigma] := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k_{\infty\omega}[\sigma]$.

$L^\omega_{\infty\omega}$ ist also die Klasse aller $L_{\infty\omega}$-Formeln, in denen nur endlich viele Variablen benutzt werden. Als Ausblick auf Kapitel 5 sei erwähnt, dass sich die bisher behandelten Fixpunktlogiken LFP, IFP, PFP sämtlich in $L^\omega_{\infty\omega}$ einbetten lassen; es gilt also PFP $\leqslant L^\omega_{\infty\omega}$. Insbesondere übertragen sich also Nicht-Definierbarkeits-Resultate für $L^\omega_{\infty\omega}$ auch auf die Fixpunktlogiken.

3.49 Beispiel. Für jede Menge $J \subseteq \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es einen $L^3_{\infty\omega}[<]$-Satz φ_J, so dass

$$\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\varphi_J) = \{\, \mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}) \;:\; <^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine lineare Ordnung auf } A \text{ und } |A| \in J \,\}.$$

Der Satz φ_J ist folgendermaßen konstruiert: Sei $\psi_{\mathrm{Ord}} \in \mathrm{FO}^3[<]$ ein Satz, der besagt, dass $<$ eine lineare Ordnung ist. Außerdem sei $\psi_\ell(x)$, für jedes $\ell \in \mathbb{N}$, der $\mathrm{FO}^2[<]$-Satz aus Beispiel 3.47. Dann ist ψ_J definiert als

$$\psi_J := \psi_{\mathrm{Ord}} \wedge \bigvee \{\, \exists x\, \psi_{\ell-1}(x) \wedge \neg \exists x\, \psi_\ell(x) \;:\; \ell \in J \,\}.$$

Wie dieses Beispiel zeigt, gibt es Strukturklassen, die schon in der 3-Variablen-Logik $L^3_{\infty\omega}$ definiert werden können, die aber nicht in FO definierbar sind (mit beliebig vielen Variablen). Wie der nächste Satz allerdings zeigt, können zwei *endliche* Strukturen, die in $L^k_{\infty\omega}$ unterschieden werden können, auch schon in FO^k unterschieden werden.

3.29 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, σ eine Signatur und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{FO}^k} \mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$), falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben $\mathrm{FO}^k[\sigma]$-Sätze (bzw. $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Sätze) erfüllen.

3.30 Satz. *Für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt:* $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{FO}^k} \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$": klar, da $\mathrm{FO}^k \subseteq L^k_{\infty\omega}$.

"$\Longrightarrow$": Per Induktion nach dem Aufbau von $L^k_{\infty\omega}$ zeigen wir, dass es zu jeder $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel $\varphi(\vec{x})$ eine $\mathrm{FO}^k[\sigma]$-Formel $\tilde{\varphi}(\vec{x})$ gibt, so dass für alle $\vec{a} \in A$, $\vec{b} \in B$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]. \tag{3.7}$$

Der einzige nicht-triviale Fall ist, dass φ von der Form $\bigvee \Psi$ oder $\bigwedge \Psi$ ist, wobei Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln ist. Wir betrachten hier den Fall $\bigvee \Psi$, der andere ist dann analog.

Sei also Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln und $\varphi := \bigvee \Psi$. Für jedes $\vec{a} \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ wähle eine Formel $\psi_{\vec{a}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$. Analog wähle für jedes $\vec{b} \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}]$ eine Formel $\psi_{\vec{b}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{B} \models \psi_{\vec{b}}[\vec{b}]$. Nun definieren wir

$$\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} := \{ \psi_{\vec{a}} : \vec{a} \in A \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \} \cup \{ \psi_{\vec{b}} : \vec{b} \in B \text{ und } \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \}.$$

Nach Konstruktion ist $\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ eine *endliche* Teilmenge von Ψ. Weiterhin gilt für alle $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$:

$$\mathfrak{A} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \bigvee \Psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$$

sowie

$$\mathfrak{B} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \bigvee \Psi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}].$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung ist jede Formel $\psi \in \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel in FO^k. Also ist auch $\bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}$ in FO^k. Es gilt also für alle $\vec{a} \in A$ und $\vec{b} \in B$: $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}]$ und $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]$. Somit ist (3.7) gezeigt. Aus (3.7) folgt insbesondere folgendes: Falls es einen $L^k_{\infty\omega}$-Satz φ gibt, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet, so gibt es auch einen FO^k-Satz, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet. Dies schließt den Beweis von "$\Longrightarrow$" ab. □

3.4.3 Pebble-Spiele

Ziel dieses Abschnitts ist es, Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Logiken FO^k und $L^k_{\infty\omega}$ einzuführen. Dazu zunächst ein paar Notationen.

Der Einfachheit halber werden wir in diesem Abschnitt nur Signaturen betrachten, die *keine Konstantensymbole* enthalten. Solche Signaturen nennen wir *relationale Signaturen*.