(d) Sei Z die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Behauptung: $\mu(Z \mid UG) = 1$

(d.h.: für $n \to \infty$ ist ein zufällig gewählter ungerichteter Graph mit Knotenmenge $\{0,\dots,n-1\}$ fast sicher zusammenhängend)

Beweis:

Sei $\overline{Z} := UG \setminus Z$ die Klasse aller unzusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Für $n \geq 1$ gilt offensichtlicherweise:

$$\mu_n(Z \mid UG) = 1 - \mu_n(\overline{Z} \mid UG).$$

Es gilt:

$$|\overline{Z}_n| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}$$

Anzahl möglicher Zerlegungen der Knotenmenge $V = \{0,\dots,n-1\}$ in eine k-elementige Menge M und ihr Komplement $\overline{M} := V \setminus M$.

Anzahl möglicher Graphen mit Knotenmenge M

Anzahl möglicher Graphen mit Knotenmenge $\overline{M}$

Und daher:

$$\mu_n(\overline{Z} \mid UG) \leq \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n-k}{2}}}$$

Nebenrechnung: F.a. $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{0,\dots,n\}$ gilt:

- $$\binom{n-k}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-k-1) - k(n-1-k)}{2}$$
$$= \frac{n(n-1) - nk - nk + k(1+k)}{2}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} - nk + \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= \binom{n}{2} - nk + \frac{k(k+1)}{2}$$

- $$\binom{n}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n-k}{2} = \binom{n}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - \binom{n}{2} + nk - \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k(k-1) + k(k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k(k-1+k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k \cdot 2k}{2}$$
$$= nk - k^2$$
$$= k \cdot (n-k) \qquad (*)$$

Somit ist
$$\mu_n(\overline{Z} \mid UG) \le \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}} \le \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^k \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{k \cdot \lg n} \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{k(n-\lg n-k)}}$$

für $k \in \{1,\dots,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ gilt:
$$k(n-\lg n-k) \ge 1 \cdot (n-\lg n-k) \ge n - \lg n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - \lg n$$

Für alle hinreichend großen n gilt:

$$\frac{n}{2} - \lg n > \frac{n}{4}$$

Somit gilt für alle hinreichend großen n und f.a. $k \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$:

- $k(n - \lg n - k) \geq \frac{n}{4}$, also
- $\frac{1}{2^{k(n-\lg n - k)}} \leq \frac{1}{2^{n/4}}$

Somit gilt f.a. hinreichend großen n:

$$\mu_n(\overline{Z} \mid UG) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{k(n-\lg n-k)}} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^{n/4}}$$

$$\leq n/2 \cdot \frac{1}{2^{n/4}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D.h.: $\mu(\overline{Z} \mid UG) = 0$

und somit $\mu(Z \mid UG) = 1$

// Ende Bsp 3.1

Definition 3.2

Sei σ eine endliche relationale Signatur,
sei S eine unter Isomorphie abgeschlossene
Klasse von σ-Strukturen und
sei $\mathcal{L}$ eine Logik.

Wir sagen:

$\mathcal{L}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl S,

falls für jeden $\mathcal{L}[\sigma]$-Satz φ und die
zugehörige Klasse $C_\varphi := \mathrm{Mod}_S(\varphi) = \{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$
gilt: $\mu(C_\varphi \mid S) = 0$ oder $\mu(C_\varphi \mid S) = 1$.

Im Folgenden schreiben wir oft auch $\mu(\varphi \mid S)$ an Stelle von $\mu(C_\varphi \mid S)$, und $\mu_n(\varphi \mid S)$ an Stelle von $\mu_n(C_\varphi \mid S)$.

Ziel:

Wir wollen zeigen, dass FO — und sogar die ausdrucksstärkere Logik $L^\omega_{\infty\omega}$, die im übernächsten Abschnitt eingeführt wird —
das 0-1-Gesetz bzgl der Klasse UG aller ungerichteten Graphen besitzt, und auch bzgl der Klasse $\mathrm{ALL}(\sigma)$ aller σ-Strukturen, für jede relationale Signatur σ.

3.2 Erweiterungsaxiome und 0-1-Gesetze für FO

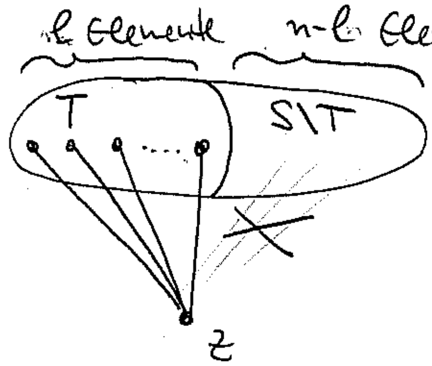
3.2.1 ... für die Klasse UG

Seien $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell$.

Das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ besagt in einem Graphen:

Ist S eine ℓ-elementige Menge und ist T eine m-elementige Teilmenge von S, so gibt es einen Knoten z, der nicht zu S gehört, und der mit jedem Knoten aus T und mit keinem Knoten aus $S \setminus T$ durch eine Kante verbunden ist.

Skizze:



Das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ lässt sich durch den folgenden $FO[E]$-Satz beschreiben:

$$EA_{\ell,m} := \forall x_1 \cdots \forall x_\ell \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \neg x_i = x_j \rightarrow \exists z \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \neg z = x_i \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} E(z, x_i) \wedge \bigwedge_{j=m+1}^{\ell} \neg E(z, x_j) \Big)\Big)$$

Für $k \geq 1$ setzen wir $EA_k := EA_{2k,k}$.

Beobachtung 3.3 ("$EA_k \Rightarrow EA_{\ell,m}$ f.a. $\ell \geq 1, m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$")

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 2k$.
Falls $G \models EA_k$, so gilt
$G \models EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1, m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$.

Beweis:
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$,
d.h. $G \models EA_{2k,k}$.
Seien $\ell \geq 1, m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$.
Sei $S \subseteq V$ mit $|S| = \ell$ und sei $T \subseteq S$ mit $|T| = m$ und sei $T' := S \setminus T$.
Wegen $|V| \geq 2k$ kann man T und T' zu disjunkten, k-elementigen Mengen $\tilde{T}$ und $\tilde{T}'$ erweitern und die $2k$-elementige Menge $\tilde{S} := \tilde{T} \cup \tilde{T}'$ betrachten.
Wegen $G \models EA_{2k,k}$ gibt es einen Knoten $z \in V \setminus \tilde{S} \subseteq V \setminus S$, so dass es von z aus zu allen Knoten in $\tilde{T}$ und zu keinem Knoten in $\tilde{T}'$ eine Kante gibt. Somit gilt: $G \models EA_{\ell,m}$.
$\square$

Der folgende Satz liefert uns den Schlüssel zum Beweis des 0-1-Gesetzes für FO bzgl UG.

<u>Satz 3.4</u>

Für jedes $k \geq 1$ ist $\mu(EA_k \mid UG) = 1$

(Anschaulich: "Fast jeder hinreichend große endliche ungerichtete Graph erfüllt das Erweiterungsaxiom EA_k")

<u>Beweis:</u>

Offensichtlicherweise reicht es, zu zeigen, dass

$$\mu(\neg EA_k \mid UG) = 0$$

ist.

Sei $C := \{ G \in UG : G \models \neg EA_k \}$

Für $n \geq 1$ ist

$$\mu_n(\neg EA_k \mid UG) = \mu_n(C \mid UG) = \frac{|C_n|}{|UG_n|}$$

Zunächst schätzen wir $|C_n|$ nach oben ab:

Dann beachte: Für jeden Graphen $G = (V,E) \in C_n$ gilt: $V = \{0, \dots, n-1\}$ und $G \models \neg EA_k$, d.h. $G \models \neg EA_{2k,k}$, d.h. es gibt disjunkte Mengen $T, T' \subseteq V$ mit $|T| = k$ und $|T'| = k$, so dass für jeden Knoten $z \in V \setminus (T \cup T')$ gilt: Es ist <u>nicht</u> der Fall, dass z mit jedem Knoten in T und mit keinem Knoten in T' durch eine Kante verbunden ist

Es gilt:

- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Menge T zu wählen
- Es gibt $\binom{n-k}{k}$ Möglichkeiten, die Menge T' zu wählen
- Es gibt $2^{\binom{2k}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen Knoten aus $T \dot\cup T'$ zu wählen
- Es gibt $2^{\binom{n-2k}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen Knoten aus $V \setminus (T \dot\cup T')$ zu wählen
- Für jeden der $(n-2k)$ Knoten z in $V \setminus (T \dot\cup T')$ können die Kanten von z zu $T \dot\cup T'$ beliebig gewählt werden, nur nicht so, dass z zu allen Elemente in T eine Kante hat und zu allen Elementen in T' keine Kante hat.
  D.h. für jedes $z \in V \setminus (T \dot\cup T')$ gibt es $(2^{2k} - 1)$ Möglichkeiten, die Kanten zwischen z und $T \dot\cup T'$ zu wählen.
  Somit gibt es $(2^{2k} - 1)^{n-2k}$ Möglichkeiten, die Kanten zwischen $V \setminus (T \dot\cup T')$ und $(T \dot\cup T')$ zu wählen.

Insgesamt zeigt dies, dass

$$|C_n| \leq \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{k}\cdot 2^{\binom{2k}{2}}\cdot 2^{\binom{n-2k}{2}}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}$$

$$\leq n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot 2^{\binom{2k}{2}+\binom{n-2k}{2}}$$

Somit:

$$\mu_n(C\,|\,UG) = \frac{|C_n|}{|UG_n|} \leq n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{2^{\binom{2k}{2}+\binom{n-2k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}}$$

$$= n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{1}{2^{\binom{n}{2}-\binom{2k}{2}-\binom{n-2k}{2}}}$$

Aus Gleichung $\circledast$ in Beispiel 3.1 (d) wissen wir, dass $\binom{n}{2}-\binom{2k}{2}-\binom{n-2k}{2} = 2k\cdot(n-2k)$ ist.

Somit gilt:

$$\mu_n(C\,|\,UG) \leq n^{2k}\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{1}{2^{2k\cdot(n-2k)}}$$

$$= n^{2k}\cdot\underbrace{\left(\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\right)}_{<1}^{n-2k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(k ist fest!)

Somit gilt: $\mu(\neg EA_k\,|\,UG) = \mu(C\,|\,UG) = 0$,

d.h. $\mu(EA_k\,|\,UG) = 1$ $\square$

Korollar 3.5

Für alle $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell$ gilt:

(a) $\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$

(b) $EA_{\ell,m}$ hat beliebig große endliche Modelle.
Genauer: Es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ s.d.
für alle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq N_0$ gilt:
Es gibt einen ungerichteten Graphen G auf N Knoten, s.d. $G \models EA_{\ell,m}$.

Beweis:

(a) Sei $k := \ell$
Wegen Beobachtung 3.3 gilt f.a. $G = (V, E) \in UG$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$, dass $G \models EA_{\ell,m}$.
Somit gilt f.a. $N \geq 2k$, dass

$$\mu_N(EA_{\ell,m} \mid UG) \geq \mu_N(EA_k \mid UG) \xrightarrow[N \to \infty]{\text{Satz 3.4}} 1$$

(b) Folgt direkt aus (a).

□

Mit Hilfe von Korollar 3.5(a) (" $\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$ ") lassen sich die Beweise aus Beispiel 3.1 (c) und (d) stark vereinfachen:

Beispiel 3.6

(a) Sei $I \subseteq UG$ die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mind. einen isolierten Knoten besitzen.

Behauptung: $\mu(I \mid UG) = 0$

Beweis:

Sei $\ell := 2$, $m := 2$. Gemäß Korollar 3.5(a) gilt $\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$.

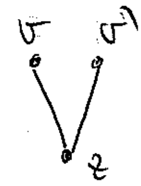
Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $G \models EA_{2,2}$ und $|V| \geq 2$ gilt:

G besitzt keinen isolierten Knoten, denn:

Seien $v, v' \in V$ beliebig, sei $S := \{v, v'\} = T$

Wegen $G \models EA_{2,2}$ gibt es einen Knoten $z \in V \setminus \{v, v'\}$ s.d. es Kanten zwischen z und v und zwischen z und v' gibt

Skizze:



Somit gilt f.a. $N \geq 2$:

$$\mu_N(I \mid UG) \leq 1 - \mu_N(EA_{2,2} \mid UG) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

D.h. $\mu(I \mid UG) = 0$.

(b) Sei $Z \subseteq UG$ die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Behauptung: $\mu(Z \mid UG) = 1$

Beweis:

Sei $l := 2$, $m := 2$. In (a) haben wir gezeigt, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $G \models EA_{2,2}$ und $|V| \geq 2$ und alle Knoten $v, v' \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg der Länge 2 von v nach v'. Insbes. ist G also zusammenhängend.

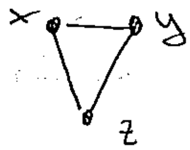
Somit gilt f.a. $N \geq 2$:

$$\mu_N(Z \mid UG) \geq \mu_N(EA_{2,2} \mid UG) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

Dh $\mu(Z \mid UG) = 1$.

(c) Sei $D \subseteq UG$ die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mindestens ein Dreieck besitzen.

Ein Dreieck in einem Graphen $G = (V, E)$ sind 3 paarweise verschiedene Knoten x, y, z, s.d. es in G Kanten zwischen x, y, zwischen y, z und zwischen z, x gibt. Skizze:



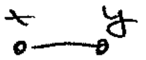
Behauptung: $\mu(D \mid UG) = 1$

Beweis:

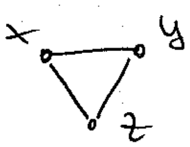
Sei $k := 2$. Zur Erinnerung: $EA_k = EA_{2k,k}$

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $G \models EA_k$ und $|V| \geq 2k = 4$ gilt gemäß Beobachtung 3.3:

$G \models EA_{n,m}$ f.a. $n \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq n \leq k$

Aus $G \models EA_{1,1}$ und $|V| > 1$ folgt, dass es Knoten $x, y \in V$ gibt die durch eine Kante miteinander verbunden sind. Skizze: .

Aus $G \models EA_{2,2}$ folgt für $S := \{x, y\} = T$, dass es einen Knoten $z \in V \setminus \{x, y\}$ gibt, der mit x und mit y durch Kanten verbunden ist.

Skizze: 

. D.h.: G besitzt ein Dreieck.

Somit gilt: f.a. $N \geq 4$:

$$\mu_N(D \mid UG) \geq \mu_N(EA_2 \mid UG) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

D.h.: $\mu(D \mid UG) = 1$ $\square$.

Mit Hilfe von Satz 3.4 und dem folgenden Lemma werden wir das 0-1-Gesetz für FO bzgl UG direkt folgern können.

<u>Lemma 3.7</u>

Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{l,m}$ für alle $l \geq 1$ und $m \geq 0$ mit $m \leq l < k$ erfüllen. Dann erfüllen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau die gleichen FO[E]-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.

<u>Beweis</u>:

Gemäß Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé genügt es, zu zeigen, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im k-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ hat.

Duplicators Gewinnstrategie wird durch die Erweiterungsaxiome gewährleistet:

<u>Runde 1</u>: Spoiler wählt einen Knoten $a_1 \in A$ oder einen Knoten $b_1 \in B$, und Duplicator antwortet mit einem beliebigen Knoten $b_1 \in B$ bzw $a_1 \in A$.

<u>Runde $i+1$, für $i \in \{1, \dots, k-1\}$</u>:

Seien $a_1, \dots, a_i \in A$ und $b_1, \dots, b_i \in B$ die in den ersten i Runden von Spoiler und

Duplicator gewählten Elemente.

$(*)_i$: Gemäß Induktionsannahme gilt f.a. $j, j' \in \{1, \dots, i\}$:

- $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$ und
- $\{a_j, a_{j'}\} \in E^{\mathfrak{A}} \iff \{b_j, b_{j'}\} \in E^{\mathfrak{B}}$

Wir betrachten OBdA den Fall, dass Spoiler in Runde $i+1$ ein Element $a_{i+1} \in A$ wählt (der Fall, dass Spoiler $b_{i+1} \in B$ wählt, kann analog behandelt werden).

Falls $a_{i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1, \dots, i\}$, so wählt Duplicator $b_{i+1} := b_j$, und $(*)_{i+1}$ ist erfüllt.

Ansonsten (d.h., falls $a_{i+1} \notin \{a_1, \dots, a_i\}$) sei

$$T := \{ a \in \{a_1, \dots, a_i\} : \text{es gibt in } \mathfrak{A} \text{ eine Kante zwischen } a_{i+1} \text{ und } a \},$$

sei $T' := \{a_1, \dots, a_i\} \setminus T$ und sei $S := T \cup T' = \{a_1, \dots, a_i\}$

Sei $\ell := |S|$ und $m := |T|$.

klar: $\ell \geq 1$, $m \geq 0$, $m \leq \ell \leq i < k$. Gemäß Voraussetzung gilt also: $\mathfrak{B} \models EA_{\ell,m}$.

Sei $\hat{S} := \{b_1, \dots, b_i\}$, $\hat{T} := \{ b_j : a_j \in T, j \in \{1, \dots, i\}\}$

$\hat{T}' := \hat{S} \setminus \hat{T}$.

Wegen $\mathfrak{B} \models EA_{\ell,m}$ gibt es einen Knoten $z \in B \setminus \hat{S}$, der mit allen Elementen in $\hat{T}$ und mit keinem Element in $\hat{T}'$ durch eine Kante verbunden ist.

Duplicator wählt $b_{i+1} := z$ und stellt dadurch sicher, dass $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Nach k Runden ist $(*)_k$ erfüllt, und daher hat Duplicator gewonnen. □

Theorem 3.8 (Glebskii et al. 1969, Fagin 1972)
FO besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse UG aller ungerichteten Graphen.

Beweis:
Sei φ ein FO[E]-Satz und sei $k := qr(\varphi)$ der Quantorenrang von φ.

Fall 1: F.a. $G = (V, E) \in$ UG mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$ gilt: $G \not\models \varphi$, dh $G \models \neg\varphi$

Dann gilt f.a. $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2k$:

$$\mu_N(\neg\varphi \mid UG) \geq \mu_N(EA_k \mid UG) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$
(Satz 3.4)

Somit gilt $\mu(\neg\varphi \mid UG) = 1$,

dh $\mu(\varphi \mid UG) = 0$.

<u>Fall 2:</u> "Fall 1 gilt nicht", d.h.:

Es gibt ein $G = (V,E) \in UG$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$ und $G \not\models \varphi$.

<u>Behauptung:</u> F.a. $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2k$ gilt:

$$\mu_N(\varphi \mid UG) \geq \mu_N(EA_k \mid UG)$$

<u>klar:</u> Daraus folgt, dass $\mu(\varphi \mid UG) \geq \mu(EA_k \mid UG)$.
Und wegen Satz 3.4 ("$\mu(EA_k \mid UG) = 1$") folgt daher: $\mu(\varphi \mid UG) = 1$.

<u>Beweis der Behauptung:</u>

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2k$.
Sei $G' = (V', E') \in UG_N$ mit $G' \models EA_k$.

<u>Beachte:</u> Es reicht, zu zeigen, dass $G' \not\models \varphi$, denn daraus folgt:

$\mu_N(\varphi \mid UG) \geq \mu_N(EA_k \mid UG)$.

<u>Situation:</u> $G, G' \models EA_k$, $|V|, |V'| \geq 2k$.

Gemäß Beobachtung 3.3 gilt:
$G, G' \models EA_{n,m}$ f.a. $n \geq 1, m \geq 0$ mit $m \leq n \leq k$.
Gemäß Lemma 3.7 erfüllen G und G' die gleichen $FO[E]$-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.
Wegen $G \not\models \varphi$ und $qr(\varphi) = k$ folgt: $G' \not\models \varphi$.

$\square$

3.2.2 ... für die Klasse $ALL(\sigma)$

Für eine Signatur σ sei $ALL(\sigma)$ die Klasse alle̲r̲ σ-Strukturen.

Theorem 3.9 (Glebskii et al 1969, Fagin 1972)

Für jede endliche relationale Signatur σ gilt: FO besitzt das 0-1-Gesetz bzgl der Klasse $ALL(\sigma)$ aller σ-Strukturen

Der Beweis von Theorem 3.9 folgt demselben Schema wie der Beweis von Theorem 3.8.

An Stelle der Erweiterungsaxiome $EA_{\ell,m}$ werden dabei Erweiterungsaxiome der folgenden Form betrachtet:

- für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \dots, x_{\ell+1}$ paarweise verschiedene Variablen und sei

$$\Delta^\sigma_{\ell+1} := \{ R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) : R \in \sigma,\ r = ar(R),\ \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_{\ell+1}\},\ x_{\ell+1} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \}$$

(d.h. $\Delta^\sigma_{\ell+1}$ ist die Menge aller atomaren σ-Formeln mit Variablen aus $\{x_1, \dots, x_{\ell+1}\}$, in denen die Variable $x_{\ell+1}$ vorkommt).

- für $\Phi \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ sei $\overline{\Phi} := \Delta^\sigma_{\ell+1} \setminus \Phi$

- für $\ell \geq 0$ und $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ sei

$$EA_{\ell,F} := \forall x_1 \dots \forall x_\ell \Big(\Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \neg x_i = x_j \rightarrow \exists x_{\ell+1} \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \neg x_{\ell+1} = x_i \;\wedge\; \bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \;\wedge\; \bigwedge_{\psi \in \overline{F}} \neg \psi \Big) \Big) \Big)$$

Insbes. gilt $EA_{0,F} = \exists x_1 \big(\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in \overline{F}} \neg \psi \big)$

Analog zu Satz 3.4 und Lemma 3.7 kann man Folgendes zeigen:

<u>Lemma 3.10</u>

Sei σ eine endliche relationale Signatur.

<u>(a)</u> F.a. $\ell \in \mathbb{N}$, f.a. $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ gilt

$$\mu\big(EA_{\ell,F} \mid ALL(\sigma) \big) = 1.$$

(b) Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,F}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq k$ und jedes $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ erfüllen.
Dann erfüllen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau die gleichen $FO[\sigma]$-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.

<u>Beweis:</u> Übung

Beweis von Theorem 3.9:

Sei φ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz und sei $k := qr(\varphi)$

Sei $\mathcal{E} := \{ EA_{\ell,F} \; : \; 0 \leq \ell \leq k, \; F \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1} \}$.

Klar: $\mathcal{E}$ ist endlich (denn: σ ist endlich, und daher auch $\Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ endlich und $\mathcal{E}$ endlich)

Setze $\eta := \bigwedge_{\varphi \in \mathcal{E}} \varphi$

Behauptung (*): $\mu(\eta \mid \mathrm{ALL}(\sigma)) = 1$

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 3.10 (a), da $\mathcal{E}$ endlich ist.
Details: Übung. $\square$

Fall 1: Es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \eta$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Dann gilt für jede σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \eta$, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ (dies folgt direkt aus Lemma 3.10(b), da $k = qr(\varphi)$ ist).

Somit gilt f.a. $N \geq 1$, dass

$$\mu_N(\varphi \mid \mathrm{ALL}(\sigma)) \geq \mu_N(\eta \mid \mathrm{ALL}(\sigma)) \xrightarrow[N \to \infty]{\text{Beh } (*)} 1.$$

✓

Fall 2: "Fall 1 gilt nicht", d.h.:

Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \eta$ gilt: $\mathfrak{A} \not\models \varphi$
d.h. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$

Dann gilt offensichtlicherweise f.a. $N \geq 1$:

$$\mu_N(\neg\varphi \mid \mathrm{All}(\sigma)) \geq \mu_N(\eta \mid \mathrm{All}(\sigma)) \xrightarrow[N \to \infty]{\text{Beh}\circledast} 1$$

D.h. $\mu(\neg\varphi \mid \mathrm{All}(\sigma)) = 1$, also

$\mu(\varphi \mid \mathrm{All}(\sigma)) = 0$. $\square$