Kapitel 3: 0-1-Gesetze

Ziel dieses Kapitels:

Zeige, dass Eigenschaften, die durch FO-Sätze (oder allgemeiner, durch Sätze der Logik $L^{\omega}_{\infty\omega}$, die in diesem Kapitel eingeführt wird), in fast allen Strukturen erfüllt sind oder in fast allen Strukturen nicht erfüllt sind.

3.1 Asymptotische Wahrscheinlichkeiten und 0-1-Gesetze

Sei σ eine endliche relationale Signatur (dh σ besteht aus endlich vielen Relationssymbolen).

Sei S eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von σ-Strukturen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$S_n := \{ \mathfrak{A} \in S : A = \{0, \dots, n-1\} \}$$

die Menge aller Strukturen aus S mit Universum $\{0, \dots, n-1\}$.

Sei C eine unter Isomorphie abgeschlossene Teilklasse von S. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $C_n := \{ \mathfrak{A} \in S_n : \mathfrak{A} \in C \}$ und setze

$$\mu_n(C|S) := \frac{|C_n|}{|S_n|} = \frac{|\{\mathfrak{A} \in C : A = \{0,\dots,n-1\}\}|}{|\{\mathfrak{A} \in S : A = \{0,\dots,n-1\}\}|}$$

D.h. $\mu_n(C|S)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig (gleichverteilt) aus S_n gewählte Struktur die Eigenschaft hat, zur Klasse C zu gehören.

Die <u>asymptotische Wahrscheinlichkeit von C bzgl. S</u> ist definiert als

$$\mu(C|S) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(C|S), & \text{falls der Grenzwert existiert} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beispiel 3.1</u>

<u>(a)</u> Sei $\sigma := \emptyset$, sei ALL die Klasse aller σ-Strukturen und sei EVEN die Klasse aller endlichen σ-Strukturen, deren Universum gerade Kardinalität besitzt.

Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

$$\mu_n(\text{EVEN} \mid \text{ALL}) = \frac{|\text{EVEN}_n|}{|\text{ALL}_n|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

denn: ALL_n besteht aus genau einer Struktur, nämlich der Struktur mit Universum $\{0, \dots, n-1\}$,
und $\text{EVEN}_n = \emptyset$ für ungerades n, und
$\text{EVEN}_n = \text{ALL}_n$ für gerades n.

Somit ist $\mu(\text{EVEN} \mid \text{ALL}) =$ undefiniert.

(b) Sei $\sigma = \{U\}$ die Signatur, die aus einem 1-stelligen Relationssymbol U besteht.

Sei ALL die Klasse aller σ-Strukturen und sei PARITY die Klasse aller σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, für die die Relation $U^{\mathfrak{A}}$ <u>gerade</u> Kardinalität besitzt.

Dann besteht ALL_n aus allen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $A = \{0, \dots, n-1\}$ und $U^{\mathfrak{A}} \subseteq A$.
D.h. $|\text{ALL}_n| = 2^n$

Und PARITY_n besteht aus allen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $A = \{0,\dots,n-1\}$ und $|U^{\mathfrak{A}}|$ ist gerade.

Dh $|\text{PARITY}_n| = |\{ w \in \{0,1\}^n : w \text{ hat gerade viele Einsen}\}|$
$$= 2^{n-1}$$

Somit gilt:

$$\mu_n(\text{PARITY} \mid \text{ALL}) = \frac{|\text{PARITY}_n|}{|\text{ALL}_n|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

und

$$\mu(\text{PARITY} \mid \text{ALL}) = \frac{1}{2}.$$

(c) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Sei UG die Klasse aller ungerichteten Graphen (dh aller Objekte $G = (V, E)$, wobei V eine nicht-leere Menge ist und E eine Menge von 2-elementigen Teilmengen von V).

Für alle $n \geq 1$ gilt: $|UG_n| = 2^{\binom{n}{2}}$
(die Anzahl aller ungerichteten Graphen mit Knotenmenge $\{0,\dots,n-1\}$).

Sei I die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mindestens einen isolierten Knoten besitzen.

<u>Behauptung</u>: $\mu(I \mid UG) = 0$

(dh: für $n \to \infty$ besitzt ein zufällig gewählter ungerichteter Graph mit Knotenmenge $\{0, \dots, n-1\}$ fast sicher keinen isolierten Knoten)

<u>Beweis</u>: Für $n \geq 1$ gilt

$$|I_n| = |\{G : G \text{ ist ungerichteter Graph mit Knotenmenge } \{0,\dots,n-1\}, \text{ und } G \text{ besitzt mind. einen isolierten Knoten}\}|$$

$$\leq n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

(n Möglichkeiten, einen isolierten Knoten zu wählen, und $2^{\binom{n-1}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen den restlichen $n-1$ Knoten zu wählen).

Somit gilt: $\mu_n(I \mid UG) \leq \dfrac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \dfrac{n}{2^{\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2}}}$

Es gilt: $\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{(n-1)(n-n+2)}{2} = n-1$

Dh: $\mu_n(I \mid UG) \leq \dfrac{n}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Somit ist $\mu(I \mid UG) = 0$.