

Unter Verwendung des Ajtai-Fagin-Spiels

können wir nachweisen, dass

Graphzusammenhang nicht ERSO-definierbar ist.

Als Hilfsmittel im Beweis verwenden wir die folgende vereinfachte Version des Satzes von Hanf,

den wir bereits aus der Vorlesung "Logik in der Informatik - Einführung in die formale Logik" kennen

Theorem 2.33 (Satz von Hanf, einfache Version, ^{hier ohne Beweis})

Sei $\sigma = \{E, X_1, \dots, X_\ell\}$ eine Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E und 1-stelligen Relationssymbolen $X_1, \dots, X_\ell$ (für $\ell \geq 0$) besteht.

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei endliche σ -Strukturen und sei $m \geq 0$.

Falls es eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt, so dass f.a. $a \in A$ gilt:

die 3^m -Nachbarschaft $N_{3^m}^{\mathcal{A}}(a)$ ist isomorph zur 3^m -Nachbarschaft $N_{3^m}^{\mathcal{B}}(f(a))$
 (kurz: $N_{3^m}^{\mathcal{A}}(a) \cong N_{3^m}^{\mathcal{B}}(f(a))$),

so hat Duplicator eine Gewinnstrategie Π_m im m -Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

Hierbei wird folgende Notation verwendet:

- Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so gilt f.a. Knoten $u, v \in V$:

$$\text{dist}^G(u, v) := \begin{cases} \infty & \text{falls es in } G \text{ keinen Weg von } u \text{ nach } v \text{ gibt} \\ \min \{ \ell \in \mathbb{N} : \text{es gibt in } G \text{ einen Weg der Länge } \ell \text{ von } u \text{ nach } v \} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, so sei $U(G)$ die ungerichtete Version von G , d.h. der ungerichtete Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge $\{ \{u, v\} : u, v \in V, u \neq v, (u, v) \in E \text{ oder } (v, u) \in E \}$

F.a. $u, v \in V$ ist

$$\text{dist}^G(u, v) := \text{dist}^{U(G)}(u, v)$$

- F.a. $r \in \mathbb{N}$ und Knoten $u \in V$ sei

$$N_r^G(u) := \{ v \in V : \text{dist}^G(u, v) \leq r \}$$

- Für $\sigma = \{E, X_1, \dots, X_k\}$ mit binärem E und unären $X_1, \dots, X_k$ und eine σ -Struktur $\mathcal{A}$ sei $G = (V, E)$ der Graph mit $V = A$ und $E = E^{\mathcal{A}}$.
Für $a, b \in A$ ist $\text{dist}^{\mathcal{A}}(a, b) := \text{dist}^G(a, b)$.
Für $r \in \mathbb{N}$ ist $N_r^{\mathcal{A}}(a) := \{ b \in A : \text{dist}^{\mathcal{A}}(a, b) \leq r \}$

- Die r -Nachbarschaft $N_r^{\mathcal{M}}(a)$ ist die $\{0\} \cup \{c\}$ -Struktur $\mathcal{C}$ mit
 - $c^c := a$
 - Universum $C := N_r^{\mathcal{M}}(a)$
 - Kantenrelation $E^c := \{E^{\mathcal{M}} \upharpoonright_n \mid n = (C \times C)^c \in C\}$
 - und unären Relationen

$$X_i^c := X_i^{\mathcal{M}} \cap C \quad \text{f.ä. } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Wir nutzen nun das Ajtai-Fagin-Spiel, um Folgendes zu zeigen: Graphzusammenhang ist nicht ERSO-definierbar.

Theorem 2.34 (Fagin, 1975)

- Graphzusammenhang ist nicht ERSO-definierbar in der Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

Beweis:

Sei $\mathcal{UGraphs}$ die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, und sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen.

Ziel: Zeige, dass Conn nicht ERSO-definierbar in $\mathcal{UGraphs}$ ist.

Gemäß Satz 2.32 genügt es, für alle $\ell, m \geq 1$ zu zeigen, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im (ℓ, m) -Ajtai-Fagin-Spiel für Conn auf $\mathcal{UGraphs}$ hat.

Seien also $\ell_m \geq 1$.

Duplicator spielt das (ℓ_m) -Ajtai-Fagin-Spiel für Conn auf Graphs gemäß folgender Strategie

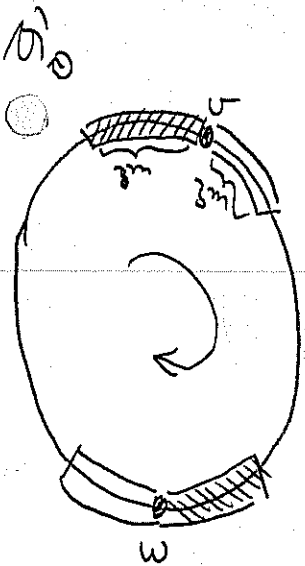
Phase 1: Duplicator wählt als $\mathcal{M} = (A, E^{\mathcal{M}}) \in \text{Conn}$ einen ungerichteten Kreis auf n Knoten, für n hinreichend groß.

"Hinreichend groß" heißt hier, dass n so groß sein soll, dass nach Spoilers Wahl der Mengen $\vec{x}^{\mathcal{M}} = (x_1^{\mathcal{M}}, \dots, x_{\ell}^{\mathcal{M}}) \in A$ für die resultierende Struktur $\mathcal{M}' := (\mathcal{M}, \vec{x}^{\mathcal{M}})$ gilt:

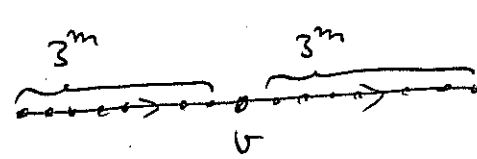
Es gibt zwei Knoten $v, w \in A$, deren gerichtete 3^m -Nachbarschaften disjunkt und isomorph sind, d.h.:

- $\text{dist}^{\mathcal{M}'}(v, w) \geq 2 \cdot 3^m + 1$ und
- $\mathcal{N}_{3^m}^{\mathcal{M}'}(v) \cong \mathcal{N}_{3^m}^{\mathcal{M}'}(w)$, wobei

$\mathcal{M}'_{\odot}$ die gerichtete Variante von $\mathcal{M}'$ bezeichnet, in der die Kanten im Uhrzeigersinn ausgerichtet sind.



Zur genauen Wahl von n schauen wir
 uns die möglichen 3^m -Nachbarschaften in $\mathcal{M}'_0$ an:
 Ist $n > 2 \cdot 3^m + 1$, so gilt für jeden Knoten v
 in $\mathcal{M}'_0$: Die 3^m -Umgebung

$\mathcal{W}_{3^m}^{\mathcal{M}'_0}(v)$ ist ein gerichteter Pfad auf
 $2 \cdot 3^m + 1$ Knoten, und v ist der Knoten in der
 Mitte des Pfads. Skizze: 

Durch die unären Relationen $\vec{X}^{\mathcal{M}} = X_1^{\mathcal{M}}, \dots, X_e^{\mathcal{M}}$ ist
 außerdem jeder dieser $2 \cdot 3^m + 1$ Knoten mit
 genau einer von 2^e möglichen "Farben" markiert
 (nämlich der Teilmenge von $\{1, \dots, e\}$, die aus
 allen j besteht, so dass der Knoten zur Menge
 $X_j^{\mathcal{M}}$ gehört).

Somit gibt es höchstens $I := (2^e)^{2 \cdot 3^m + 1}$
 mögliche 3^m -Nachbarschaften.

Wir setzen nun

$$n := (I + 1) \cdot (2 \cdot 3^m + 1)$$

und lassen Duplicator in Phase 1 einen ungerichteten Kreis $\mathcal{O}$ auf n Knoten wählen.

Seien $\vec{X} := x_1^{\mathcal{O}}, \dots, x_e^{\mathcal{O}} \in A$ die von Spoiler in Phase 1 gewählten Mengen,

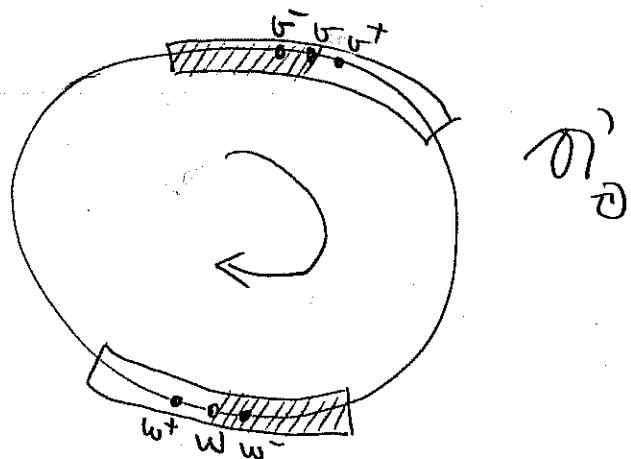
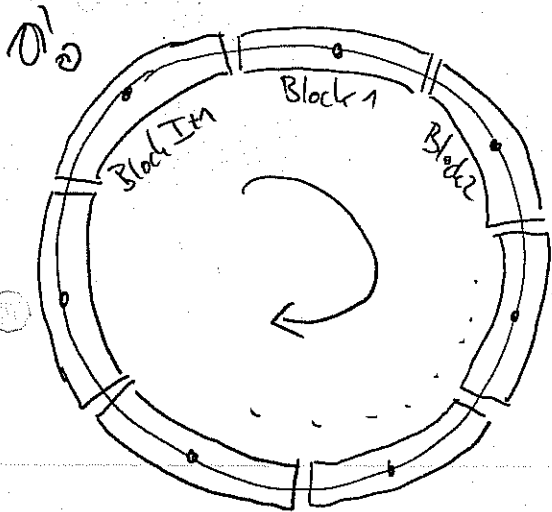
sei $\mathcal{O}' := (\mathcal{O}, \vec{X}^{\mathcal{O}})$ und sei $\mathcal{O}'_{\odot}$ die

gerichtete Variante von $\mathcal{O}'$, in der die Kanten im

Uhrzeigersinn ausgerichtet sind.

Phase 2: Gemäß unserer Wahl von n wissen wir, dass es zwei Knoten $v, w \in A$ geben muss, so dass gilt:

- $\text{dist}^{\mathcal{O}'_{\odot}}(v, w) \geq 2 \cdot 3^m + 1$ und
- $N_{3^m}^{\mathcal{O}'_{\odot}}(v) \cong N_{3^m}^{\mathcal{O}'_{\odot}}(w)$.

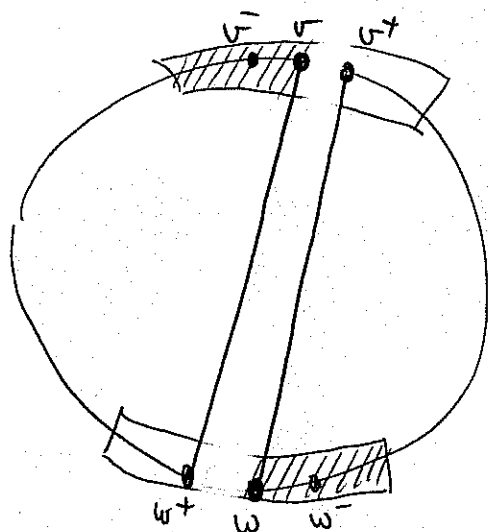


Seien $\bar{v}, v^+, \bar{w}, w^+$ diejenigen Knoten in A , für die gilt:
 $(\bar{v}, v) \in E^{\mathcal{O}'_{\odot}}$, $(v, v^+) \in E^{\mathcal{O}'_{\odot}}$, $(\bar{w}, w) \in E^{\mathcal{O}'_{\odot}}$, $(w, w^+) \in E^{\mathcal{O}'_{\odot}}$

In Phase 2 lassen wir Duplicator als

$B \in \mathcal{U}\text{Graphs} / \text{Conn}$ den Graphen $B = (B, E^B)$

wie folgt wählen:



- $B := A$

- E^B entsteht aus E^A , indem man die Kanten zwischen v und v^+ bzw. zwischen w und w^+ löscht und stattdessen neue Kanten zwischen v und w^+ bzw. zwischen w und v^+ einfügt

Der so konstruierte Graph besteht offensichtlich aus zwei disjunkten Kreisen.

Des Weiteren wählt Duplicator die Mengen X

• $\vec{X}^B := X_1^B, \dots, X_\ell^B \subseteq B$ identisch zu $\vec{X}^A$, d.h.

$$X_i^B := X_i^A \quad \text{f.a. } i \in \{1, \dots, \ell\}.$$

Man sieht leicht, dass in der zugehörigen Struktur $B' := (B, \vec{X}^B)$ gilt:

für jeden Knoten $u \in A = B$ ist

$$W_{3^m}^A(u) \cong W_{3^m}^{B'}(u)$$

Phase 3: Wir müssen zeigen, dass

Duplicator eine Gewinnstrategie im m -Runden EF -Spiel auf $\mathcal{M}'$, $\mathcal{B}'$.

Dies folgt direkt aus dem Satz von Hanf (Theorem 2.33), indem wir die bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ via $f(a) := a \quad f \cdot a \quad a \in A$ wählen (beachte: hier ist $A = B$).

□

Abschließende Bemerkungen:

Man kann praktisch für jede Logik ein geeignetes Spiel entwerfen.

Insbesondere für MSO wird ein solches Spiel in den Übungsaufgaben erarbeitet. Mit dessen Hilfe kann Folgendes gezeigt werden

Satz 2.35 ("MSO = FO auf unären Signaturen")

Sei σ eine Signatur, die aus 1-stelligen Relationsymbolen und Konstantensymbolen besteht.

Für jeden MSO[σ]-Satz gibt es einen äquivalenten FO[σ]-Satz.

Beweis: Übung.