Definition 2.25 ($FIN_<$)

(a) Eine geordnete Struktur ist eine Struktur $\mathfrak{A}$ über einer endlichen funktionenfreien Signatur, die das 2-stellige Relationssymbol $<$ enthält, und bei der dieses Symbol durch eine lineare Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ auf $\mathfrak{A}$ interpretiert wird.

(b) Die Klasse aller endlichen geordneten Strukturen bezeichnen wir mit $FIN_<$

Definition 2.26 (Horn-Klauseln und ESO-Horn)

(a) Eine aussagenlogische Horn-Klausel ist eine Disjunktion von aussagenlogischen Literalen (d.h. aussagenlogische Variablen bzw. negierte aussagenlogische Variablen), in der höchstens eine der Variablen unnegiert vorkommt.

Beachte: • Eine aussagenlogische Horn-Klausel der Form $(\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \dots \vee \neg X_\ell \vee X_{\ell+1})$ lässt sich schreiben als Implikation $(X_1 \wedge \dots \wedge X_\ell) \to X_{\ell+1}$.

• Die Hornklausel $(\neg X_1 \vee \dots \vee \neg X_\ell)$ lässt sich schreiben als Implikation $(X_1 \wedge \dots \wedge X_\ell) \to \text{false}$.

Bsp: • $\neg Y_1 \vee \neg Y_2 \vee Y_3 \equiv (Y_1 \wedge Y_2) \to Y_3$

• $(\neg Y_1 \vee \neg Y_2 \vee \neg Y_3) \equiv (Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3) \to \text{false}$

(b) Sei σ eine funktionenfreie Signatur, seien $X_1, \dots, X_d$ Relationsvariablen und sei

$\sigma' := \sigma \cup \{X_1, \dots, X_d\}$

Eine <u>σ'-Horn-Klausel bzgl $X_1 \dots X_d$</u> ist eine Disjunktion von $FO[\sigma]$-Formeln (in denen keins der Symbole $X_1 \dots X_d$ vorkommt), atomaren oder negierten atomaren Formeln über $\{X_1, \dots, X_d\}$, wobei höchstens <u>ein</u> über $\{X_1, \dots, X_d\}$ gebildetes Atom <u>un</u>negiert vorkommt.

<u>Beachte:</u> Jede σ'-Horn-Klausel bzgl. $X_1, \dots, X_d$ lässt sich schreiben als

<u>(1)</u> $X_i(\bar{y})$ mit $X_i \in \{X_1, \dots, X_d\}$,
$\bar{y} \in Var_1 \cup \{c : c \in \sigma\}$

<u>(2)</u> $(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_m) \to X_i(\bar{y})$ mit

$m \geq 1$, $X_i(\bar{y})$ wie in <u>(1)</u>, f.a. $j \in \{1, \dots, m\}$ ist β_j eine $FO[\sigma]$-Formel (in der $X_1 \dots X_d$ <u>nicht</u> vorkommen) oder von der Form $X_k(\bar{z})$ mit $X_k \in \{X_1 \dots, X_d\}$ und $\bar{z} \in (Var_1 \cup \{c : c \in \sigma\})^{ar(X_k)}$

<u>(3)</u> $(\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_m) \to$ false mit
$m \geq 1$ und $\beta_1, \dots, \beta_m$ wie in <u>(2)</u>.

(c) Die Klasse <u>ESO-Horn</u> besteht aus allen ESO-Sätzen Φ der Form

$$\exists X_1 \cdots \exists X_d \quad \forall y_1 \cdots \forall y_{d'} \quad \varphi ,$$

wobei $d, d' \geq 0$, $X_1, \dots, X_d$ Relationsvariablen, $y_1, \dots, y_{d'}$ Individuenvariablen und φ eine Konjunktion von σ'-Horn-Klauseln bzgl $X_1, \dots, X_d$ ist (mit $\sigma' = \sigma \cup \{X_1, \dots, X_d\}$, wobei σ die Signatur von Φ ist).

Theorem 2.27 (Satz von Grädel, 1991)

ESO-Horn beschreibt P auf der Klasse $\mathrm{FIN}_<$ aller geordneten endlichen Strukturen.

(Hier bezeichnet P die Klasse aller deterministisch in Polynomialzeit lösbaren Probleme.)

Beweis:

1. Teil: Sei Φ ein ESO-Horn-Satz

zu zeigen: Das Problem

$\mathrm{Eval}_{\mathrm{FIN}_<}(\Phi)$
Eingabe: Eine endliche geordnete Struktur $\mathfrak{A}$
Frage: Gilt $\mathfrak{A} \models \Phi$?

ist in Polynomialzeit lösbar.

Idee: (1) Bei Eingabe von $\mathfrak{A}$ gehe ähnlich wie im obigen Beweis des Satzes von Cook-Levin vor, um Φ in Polyn.zeit in eine aussagenlogische Formel α umzuwandeln, für die gilt:

α ist erfüllbar $\iff$ $\mathfrak{A} \models \Phi$.

(2) Wandle α um in eine Konjunktion von aussagenlogischen Horn-Klauseln

(3) Zeige, dass das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Klauseln in Polynomialzeit lösbar ist.

Details: Übung!

2. Teil:

Sei $\sigma = \{<, R_1, \ldots, R_\ell, c_1, \ldots, c_{\ell'}\}$ eine Signatur und sei C eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher geordneter σ-Strukturen, so dass das Problem

Eingabe: eine endliche geordnete σ-Struktur $\mathfrak{A}$ (repräsentiert durch $enc_{<^{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{A})$)

Frage: Ist $\mathfrak{A} \in C$?

in P liegt, d.h. durch eine deterministische TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ gelöst wird, für die es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. M bei Eingabe von $enc_{<^{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{A})$ weniger als n^k Schritte macht, für $n = |A|$.

Gehe ähnlich vor wie im Beweis des 2. Teils des Satzes von Fagin, um einen ESO-Horn-Satz Φ zu konstruieren, s.d. f.a. endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \Phi \iff M \text{ akzeptiert } enc_{<^{\mathfrak{A}}}(\mathfrak{A}).$$

Details: Übung!

$\blacksquare$

2.4 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele für Fragmente der Logik zweiter Stufe

Der Satz von Fagin besagt:

ESO beschreibt NP auf FIN.

Ein denkbarer Ansatz, um "$P \neq NP$" nachzuweisen, beruht auf der folgenden Beobachtung:

1) P ist abgeschlossen unter Komplementbildung
(D.h.: Ist Problem A in P, so ist auch das Komplement A^c von A in P, wobei A^c aus A entsteht, indem "Akzeptieren" und "Verwerfen" vertauscht wird)

2) Falls wir zeigen können, dass NP <u>nicht</u> unter Komplementbildung abgeschlossen ist (kurz: $NP \neq coNP$), so haben wir auch gezeigt, dass $P \neq NP$ ist

3) Um zu zeigen, dass $NP \neq coNP$ ist, könnten wir wie folgt vorgehen:
- Nimm ein geeignetes Problem $A \in NP$
- Sei $B := A^c$
- Zeige, dass $B \notin NP$ ist, D.h.:
Zeige, dass B <u>nicht ESO-definierbar</u> ist.

In der Veranstaltung "Logik in der Informatik – Einführung in die formale Logik" haben wir mit den Ehrenfeucht-Fraïsse-Spielen bereits ein Werkzeug kennengelernt, mit dem man nachweisen kann, dass bestimmte Probleme nicht FO-definierbar sind.
Hier werden wir dieses Werkzeug nun erweitern, so dass damit Nicht-Definierbarkeit in ESO nachgewiesen werden kann.

<u>Zur Erinnerung</u>:

- Sei σ eine funktionenfreie Signatur, seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \geq 0$.
- Das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wird wie folgt gespielt:
  - Es gibt 2 Spieler namens <u>Spoiler</u> und <u>Duplicator</u>
  - Das "Spielbrett" besteht aus den beiden Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$
  - Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden. In jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ geschieht Folgendes:

1) Spoiler wählt ein Element $a_i \in A$ oder ein Element $b_i \in B$

2) Duplicator antwortet mit einem Element $b_i \in B$, falls Spoiler $a_i \in A$ gewählt hat, bzw mit einem Element $a_i \in A$, falls Spoiler $b_i \in B$ gewählt hat.

- Nach der m-ten Runde ist die Partie beendet, und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Sei $\pi : \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{c^{\mathfrak{A}} : c \in \sigma\} \to \{b_1, \dots, b_m\} \cup \{c^{\mathfrak{B}} : c \in \sigma\}$

die Abbildung mit

$\pi(a_i) := b_i$ f.a. $i \in \{1, \dots, m\}$ und

$\pi(c^{\mathfrak{A}}) := c^{\mathfrak{B}}$ f.a. $c \in \sigma$.

Duplicator hat gewonnen, falls π ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist,

d.h. falls gilt:

(1) f.a. $i, j \in \{1, \dots, m\}$, f.a. $c, c' \in \sigma$ gilt:

* $a_i = a_j \iff b_i = b_j$
* $a_i = c^{\mathfrak{A}} \iff b_i = c^{\mathfrak{B}}$
* $c^{\mathfrak{A}} = c'^{\mathfrak{A}} \iff c^{\mathfrak{B}} = c'^{\mathfrak{B}}$

(d.h.: π ist wohldefiniert und bijektiv)

und

(2) f.a. $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$ und

f.a. $d_1, \dots, d_r \in \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{c^{\mathfrak{A}} : c \in \sigma\}$ gilt:

$$(d_1, \dots, d_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(d_1), \dots, \pi(d_r)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

Ansonsten hat Spoiler die Partie gewonnen.

- Man sieht leicht, dass bei gegebenem $m, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ genau einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzen muss.

Der Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé besagt:

Theorem 2.28 (Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé)
Sei σ eine endliche funktionenfreie Signatur, seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$.
Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt einen $FO[\sigma]$-Satz φ vom Quantorenrang $\leq m$, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$

(b) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

(Hier ohne Beweis) $\square$

Das EF-Spiel kann auf naheliegende Weise für die Logik ESO erweitert werden:

<u>Definition 2.29</u> (EF-Spiel für ESO)

Seien $l, m \geq 1$ und seien $r_1, \dots, r_l \geq 1$.
Sei σ eine funktionenfreie Signatur und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen.
Das <u>$((r_1, \dots, r_l), m)$-EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$</u> besteht aus 2 Phasen:

<u>Phase 1</u>: Spoiler wählt Relationen
$X_1^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{r_1}, \dots, X_l^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{r_l}$
über dem Universum von $\mathfrak{A}$.
Duplicator antwortet mit Relationen
$X_1^{\mathfrak{B}} \subseteq B^{r_1}, \dots, X_l^{\mathfrak{B}} \subseteq B^{r_l}$
über dem Universum von $\mathfrak{B}$.

<u>Phase 2</u>: Spoiler und Duplicator spielen das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$, wobei $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A}, X_1^{\mathfrak{A}}, \dots, X_l^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, X_1^{\mathfrak{B}}, \dots, X_l^{\mathfrak{B}})$.

Satz 2.30

Sei σ eine endliche funktionenfreie Signatur,
seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen,
seien $\ell, m, r_1, \dots, r_\ell \geq 1$.
Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) Es gibt einen $\mathrm{ESO}[\sigma]$-Satz Φ der Form $\exists X_1 \cdots \exists X_\ell \, \varphi$,

mit $ar(X_i) = r_i$ f.a. $i \in \{1, \dots, \ell\}$ und $qr(\varphi) \leq m$,

so dass $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \not\models \Phi$

(b) Spoiler hat eine Gewinnstrategie im $((r_1, \dots, r_\ell), m)$-EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Laut Voraussetzung gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \not\models \Phi$.

Um zu gewinnen, kann Spoiler im $((r_1, \dots, r_\ell), m)$-EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wie folgt vorgehen:

In Phase 1 wählt Spoiler Relationen $X_1^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathfrak{A}} \subseteq A^{r_\ell}$, s.d. $(\mathfrak{A}, X_1^{\mathfrak{A}}, \dots, X_\ell^{\mathfrak{A}}) \models \varphi$

(die gibt es, da laut Voraussetzung gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$).

Seien $X_1^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_\ell}$ die in Phase 1 von Duplicator gewählten Relationen.

Da laut Voraussetzung gilt: $\mathcal{B} \not\models \Phi$, wissen wir, dass gilt: $(\mathcal{B}, X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}) \not\models \varphi$

Gemäß Theorem 2.28 hat wegen $qr(\varphi) \leq m$ Spoiler also eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}, X_1^{\mathcal{A}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}})$, gemäß derer er in Phase 2 vorgehen kann.

<u>(b) ⇒ (a)</u>: Laut Voraussetzung hat Spoiler eine Gewinnstrategie im $((r_1, \dots, r_\ell), m)$-EF-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

D.h. es gibt $X_1^{\mathcal{A}} \subseteq A^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathcal{A}} \subseteq A^{r_\ell}$, so dass für alle $X_1^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_\ell}$ gilt:

Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, X_1^{\mathcal{A}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{A}})$, $(\mathcal{B}, X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}})$.

Gemäß Theorem 2.28 gibt es also einen $FO[\sigma \cup \{X_1, \dots, X_\ell\}]$-Satz $\varphi_{X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}}$ vom Quantorenrang $\leq m$, so dass gilt:

$$(\mathcal{A}, X_1^{\mathcal{A}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{A}}) \models \varphi_{X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}} \quad \text{und}$$

$$(\mathcal{B}, X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}) \not\models \varphi_{X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}}.$$

Wir setzen

$$\varphi := \bigwedge \left\{ \varphi_{X_1^{\mathcal{B}},\dots,X_\ell^{\mathcal{B}}} \; : \; X_1^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_\ell} \right\}$$

und erhalten so einen $FO[\sigma \cup \{X_1 \dots X_\ell\}]$-Satz $^{(*)}$ vom Quantorenrang $\leq m$, so dass gilt:

$(\mathcal{A}, X_1^{\mathcal{A}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{A}}) \models \varphi$, und

f.a. $X_1^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_1}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}} \subseteq B^{r_\ell}$ gilt:

$(\mathcal{B}, X_1^{\mathcal{B}}, \dots, X_\ell^{\mathcal{B}}) \not\models \varphi$.

Somit gilt für $\Phi := \exists X_1 \cdots \exists X_\ell \; \varphi$, dass

$\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \not\models \Phi$.

$(*)$: <u>Beachte</u>: φ ist eine FO-Formel, da es nur <u>endlich</u> viele paarweise nicht-äquivalente FO-Formeln vom Quantorenrang $\leq m$ gibt (siehe Vorlesung "Logik in der Informatik — Einführung in die formale Logik")

$\Box$

Das hier eingeführte Spiel liefert einen prinzipiellen Ansatz, um nachzuweisen, dass $NP \neq coNP$ (und daher auch $P \neq NP$) ist:

Nimm z.B. das NP-vollständige 3-Färbbarkeitsproblem (Eingabe: ein Graph G
Frage: Ist G 3-färbbar?)

und sei C das Komplement des 3-Färbbarkeitsproblems, d.h.:

C: Eingabe: ein Graph G Frage: Ist G <u>nicht</u> 3-färbbar?

Es gilt:

$NP \neq coNP$

$\iff$ $C \notin NP$

$\iff$ C ist <u>nicht</u> ESO-definierbar auf FIN

$\iff$ f.a. $\ell \geq 1$, $r_1, \ldots, r_\ell \geq 1$, $m \geq 1$ gibt es Graphen $\mathfrak{A} \in C$ (d.h. $\mathfrak{A}$ ist <u>nicht</u> 3-färbbar) und $\mathfrak{B} \in FIN \setminus C$ (d.h. $\mathfrak{B}$ ist 3-färbbar), so dass <u>Duplicator</u> eine Gewinnstrategie im $((r_1, \ldots, r_\ell), m)$-EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ hat.

Leider ist dieser Ansatz — genau wie alle anderen Verfahren zum Trennen von NP und coNP — bisher gescheitert (unter Anderem an der enormen Komplexität des Nachweises von Gewinnstrategien).

Für den Spezialfall der existentiellen monadischen Logik zweiter Stufe (EMSO) war der EF-Spiel-Ansatz allerdings sehr erfolgreich.

EMSO und das Ajtai-Fagin-Spiel

Definition 2.31 (Das Ajtai-Fagin-Spiel)

Sei σ eine funktionenfreie Signatur, sei S eine Klasse von σ-Strukturen und sei $C \subseteq S$. Seien $l, m \geq 1$.

Das (l,m)-Ajtai-Fagin-Spiel für C auf S wird wie folgt gespielt:

Phase 1: Duplicator wählt eine Struktur $\mathfrak{A} \in C$. Danach wählt Spoiler l Mengen $X_1^{\mathfrak{A}}, \dots, X_l^{\mathfrak{A}} \subseteq A$.

Phase 2: Duplicator wählt eine Struktur $\mathfrak{B} \in S \setminus C$ und l Mengen $X_1^{\mathfrak{B}}, \dots, X_l^{\mathfrak{B}} \subseteq B$.

Phase 3: Spoiler und Duplicator spielen das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ für $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A}, X_1^{\mathfrak{A}}, \dots, X_l^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, X_1^{\mathfrak{B}}, \dots, X_l^{\mathfrak{B}})$.

Satz 2.32 (Ajtai und Fagin, 1988)

Sei σ eine endliche, funktionenfreie Signatur, sei S eine Klasse von σ-Strukturen und sei $C \subseteq S$. Dann sind äquivalent:

(a) C ist EMSO-definierbar in S

(b) Es gibt $l, m \geq 1$, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im (l,m)-Ajtai-Fagin-Spiel für C auf S hat.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\Phi = \exists X_1 \cdots \exists X_l\, \varphi$ ein EMSO[σ]-Satz, der C in S definiert (d.h.: f.a. $\mathfrak{A} \in S$ gilt: $\mathfrak{A} \in C \iff \mathfrak{A} \models \Phi$).

Sei $m := qr(\varphi)$. Spoiler hat folgende Gewinnstrategie in (l,m)-Ajtai-Fagin-Spiel für C auf S:

Phase 1: Sei $\mathfrak{A} \in C$ die von Duplicator gewählte Struktur. Wegen $\mathfrak{A} \models \Phi$, kann Spoiler l Mengen $X_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, X_l^{\mathfrak{A}} \subseteq A$ wählen, so dass für $\mathfrak{A}' := (\mathfrak{A}, X_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, X_l^{\mathfrak{A}})$ gilt: $\mathfrak{A}' \models \varphi$.

Phase 2: Seien $\mathfrak{B} \in S \setminus C$ und $X_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, X_l^{\mathfrak{B}} \subseteq B$ von Duplicator gewählt. Es gilt: $\mathfrak{B} \not\models \Phi$, d.h. für $\mathfrak{B}' := (\mathfrak{B}, X_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, X_l^{\mathfrak{B}})$ gilt: $\mathfrak{B}' \not\models \varphi$.

Phase 3: Wegen $\mathfrak{A}' \models \varphi$, $\mathfrak{B}' \not\models \varphi$ und $qr(\varphi) = m$ hat Spoiler gemäß Theorem 2.28 eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Gemäß Voraussetzung gibt es $\ell, m \geq 1$, so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im (ℓ, m)-Ajtai-Fagin-Spiel für C auf S hat. D.h.:

für jedes $\mathfrak{A} \in C$ gibt es Mengen $\overline{X}^{\mathfrak{A}} := X_1^{\mathfrak{A}}, \dots, X_\ell^{\mathfrak{A}} \subseteq A$, so dass

für alle $\mathfrak{B} \in S \setminus C$ und alle $\overline{X}^{\mathfrak{B}} = X_1^{\mathfrak{B}}, \dots, X_\ell^{\mathfrak{B}} \subseteq B$ gilt:

es gibt einen $FO[\sigma \cup \{X_1, \dots, X_\ell\}]$-Satz $\varphi_{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}, \overline{X}^{\mathfrak{B}}}$ vom Quantorenrang $\leq m$, s.d.

$(\mathfrak{A}, \overline{X}^{\mathfrak{A}}) \models \varphi_{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}, \overline{X}^{\mathfrak{B}}}$ und

$(\mathfrak{B}, \overline{X}^{\mathfrak{B}}) \not\models \varphi_{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}, \overline{X}^{\mathfrak{B}}}$

Setze $$\psi_{\mathfrak{A}} := \bigwedge \left\{ \varphi_{\mathfrak{A}; \mathfrak{B}, \overline{X}^{\mathfrak{B}}} \; : \; \begin{array}{l} \mathfrak{B} \in S \setminus C, \\ \overline{X}^{\mathfrak{B}} = X_1^{\mathfrak{B}}, \dots, X_\ell^{\mathfrak{B}} \subseteq B \end{array} \right\}$$

und $\psi := \bigvee \{ \psi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in C \}$

und $\Phi := \exists X_1 \cdots \exists X_\ell \; \psi$.

Dann ist Φ ein EMSO[σ]-Satz(*),

so dass gilt:

1) f.a. $\mathfrak{A} \in C$ gilt: $\mathfrak{A} \models \Phi$, und

2) f.a. $\mathfrak{B} \in S \setminus C$ gilt: $\mathfrak{B} \not\models \Phi$

(*): Beachte: $\varphi_{\mathfrak{A}}$ und φ sind FO-Formeln, da es nur endlich viele paarweise nicht-äquivalente FO-Formeln vom Quantorenrang $\leq m$ gibt.

$\square$

Das Komplement von Graphzusammenhang

Eingabe: ein ungerichteter Graph G

Frage: Ist G unzusammenhängend?

wird durch die folgende EMSO-Formel definiert:

$$\exists X \Big(\exists y\, X(y) \;\wedge\; \exists z\, \neg X(z) \;\wedge\; \forall x \forall x' \big((X(x) \wedge E(x,x')) \to X(x') \big) \Big)$$