

Vorlesung Logik und Komplexität — Endliche Modelltheorie

SoSe 2014

VL: dienstags, 14-17h

Ü: donnerstags, 14-16h, Frederike Harwath

Kapitel 0: Einleitung

Logiken zur Beschreibung von Berechnungsproblemen

Beispiel (3-Färbbarkeit von Graphen)

Def. Ein Graph $G=(V,E)$ heißt 3-färbbar, falls seine Knoten so mit 3 Farben gefärbt werden können, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Somit gilt:

G ist 3-färbbar

(\Rightarrow) ex $R \subseteq V$, $G \subseteq V$, $B \subseteq V$, s.d. für $u,v \in V$ gilt:
falls $(u,v) \in E$, so

$$\neg \left((R(u) \wedge R(v)) \vee (G(u) \wedge G(v)) \vee (B(u) \wedge B(v)) \right)$$

(\Leftarrow) $G \not\models \Phi_{3\text{-col}}$, wobei

$$\Phi_{3-col} := \exists R \exists G \exists B \left(\forall u \left((R(u) \wedge \neg G(u) \wedge \neg B(u)) \vee (\neg R(u) \wedge G(u) \wedge \neg B(u)) \vee (\neg R(u) \wedge \neg G(u) \wedge B(u)) \right) \wedge \forall u \forall v \left(E(u,v) \rightarrow \neg \left((R(u) \wedge R(v)) \vee (G(u) \wedge G(v)) \vee (B(u) \wedge B(v)) \right) \right) \right)$$

Φ_{3-col} ist eine Formel der Logik zweiter Stufe (SO), die eine wichtige Rolle in dieser Vorlesung spielt.

Wir werden z.B. Folgendes nachweisen:

Satz von Fagin:

Ein Problem gehört genau dann zur Komplexitätsklasse NP, wenn es durch einen Satz der existentiellen Logik zweiter Stufe (ESO) beschrieben werden kann.

Zur Erinnerung: In der Vorlesung "Logik in der Informatik - Einführung in die formale Logik" haben wir bereits gesehen, dass 3-Färbbarkeit von Graphen nicht durch einen Satz der Logik erster Stufe (FO) beschrieben werden kann.

Beispiel (Erreichbarkeit)

Berechnungsproblem ERREICHBARKEIT:

Eingabe: ein Graph $G = (V, E)$ und
zwei Knoten $s, t \in V$

Frage: Gibt es in G einen Weg von s nach t ?

Antwort: "ja" $(\Leftrightarrow) (G, s, t) \models \Phi_{\text{REACH}}$ mit

$$\Phi_{\text{REACH}} := (s=t \vee \underbrace{\exists_{x,y} [tc_{x,y} E(x,y)]}_{\text{transitiver Abschluss}})(s,t)$$

"verallgemeinerter Quantor", der den transitiven Abschluss der Relation E bezeichnet

Φ_{REACH} ist eine Formel der Transitive-Hüllen-Logik (TL), die eine wichtige Rolle in dieser Vorlesung spielt und die die Komplexitätsklasse NL (nichtdeterministisches Logspace) charakterisiert.

Alternativ kann ERREICHBARKEIT auch durch folgenden Satz der kleinsten Fixpunktlogik (LFP) beschrieben werden:

$$\Phi_{REACH}^1 := \left[\text{lfp}_{R,x} \left(x=s \vee \exists z (R(z) \wedge E(z,x)) \right) \right] (t)$$

"induktive Definition" einer 1-stelligen Relation R:

- Starte mit $R := \emptyset$
- itereiere so lange, bis sich nichts mehr ändert:
 - $R' := \left\{ x \in V : (G, R, x, st) \models x=s \vee \exists z (R(z) \wedge E(z,x)) \right\}$
 - $R := R'$

Fixpunktlogiken dienen der Charakterisierung der Komplexitätsklassen P und PSPACE.

Aufbau der Vorlesung

0. ~~Einleitung~~ ~~Vorlesung~~
1. Grundlagen
2. Logik zweiter Stufe
3. 0-1-Gesetze
4. Transitiv-Hüllen Logik
5. Fixpunktlogiken