Kapitel 4: Der Satz von Gaifman

Der Satz von Gaifman liefert ein tiefes Verständnis dafür, welche Aussagen durch Formeln der Logik erster Stufe getroffen werden können. In gewisser Weise besagt der Satz von Gaifman, dass die Logik erster Stufe nur "lokale" Eigenschaften von Strukturen beschreiben kann.

Der Einfachheit halber werden wir <u>in diesem Kapitel</u> nur <u>endliche relationale Signaturen</u> betrachten, d.h. endliche Signaturen, die ausschließlich aus Relationssymbolen bestehen.

4.1 Formulierung und Beweis des Satzes von Gaifman

Bevor wir die exakte Formulierung des Satzes von Gaifman angeben können, benötigen wir zunächst noch einige Notationen und einfache Beobachtungen.

Lemma 4.1

Sei σ eine endliche relationale Signatur und sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine FO[σ]-Formel $dist_{\leq r}(y,x)$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models dist_{\leq r}[b,a] \iff Dist^{\mathfrak{A}}(b,a) \leq r.$$

Analog gibt es für jede Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und das Variablentupel $\vec{x} = x_1,\dots,x_k$ eine FO[σ]-Formel

$dist_{\leq r}(y,x_1,\dots,x_k)$ (kurz: $dist_{\leq r}(y,\vec{x})$),

so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle $\vec{a} = a_1,\dots,a_k \in A$ und alle $b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models dist_{\leq r}[b,a_1,\dots,a_k] \iff Dist^{\mathfrak{A}}(b,\{a_1,\dots,a_k\}) \leq r.$$

Beweis: Per Induktion nach r.

$r=0$: $dist_{\leq 0}(y,x) := y=x$

$r=1$: $dist_{\leq 1}(y,x) := \Big(y=x \ \vee$

$$\bigvee_{R \in \sigma} \exists u_1 \cdots \exists u_{ar(R)} \Big(R(u_1,\dots,u_{ar(R)}) \wedge \bigvee_{1 \leq i,j \leq ar(R)} (u_i = x \wedge u_j = y) \Big)\Big)$$

$r \geq 2$:

$$\mathrm{dist}_{\leq r}(y,x) := \Big(\mathrm{dist}_{\leq r-1}(y,x) \vee \exists z\big(\mathrm{dist}_{\leq r-1}(y,z) \wedge \mathrm{dist}_{\leq 1}(z,x)\big)\Big)$$

Für $\vec{x} = x_1,\dots,x_k$ setzen wir (für jedes $r \in \mathbb{N}$)

$$\mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x}) := \bigvee_{i=1}^{k} \mathrm{dist}_{\leq r}(y,x_i).$$

$\square$

Notation 4.2:
Zur besseren Lesbarkeit von Formeln schreiben wir im Folgenden oft

$\mathrm{dist}(y,\vec{x}) \leq r$ an Stelle von $\mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x})$,

und

$\mathrm{dist}(y,\vec{x}) > r$ an Stelle von $\neg\mathrm{dist}_{\leq r}(y,\vec{x})$.

Als nächstes führen wir einige Begriffe zur Lokalität von Formeln ein. Informell gesprochen ist eine Formel $\varphi(\vec{x})$ genau dann lokal, wenn sie nur über eine r-Nachbarschaft von $\vec{x}$ "spricht".

Definition 4.3 (lokale Formeln)

Sei σ eine relationale Signatur und sei $\psi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\emptyset \neq frei(\psi) = \{\vec{x}\}$.

(a) Sei $r \in \mathbb{N}$.
Die Formel ψ heißt <u>r-lokal um $\vec{x}$</u>, falls für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $\vec{a} \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi[\vec{a}]$$

(b) Die Formel ψ heißt <u>lokal um $\vec{x}$</u>, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ψ r-lokal um $\vec{x}$ ist.

Beispiel 4.4

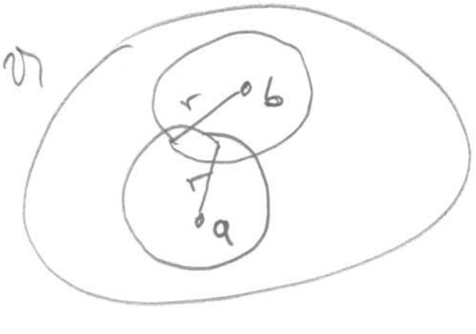
Für jedes $r \in \mathbb{N}$ ist die Formel

$$dist(y,x) > 2 \cdot r$$

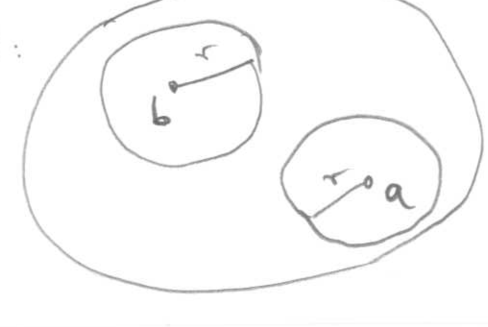
aus Lemma 4.1 r-lokal um y, x

Skizze: $\mathfrak{A}$

Distanz $\leq 2r$:



$\mathfrak{A}$:



Distanz $> 2r$

Man sieht leicht, dass eine Formel, die r-lokal um $\vec{x}$ ist, auch für jedes $r' \geq r$ r'-lokal um $\vec{x}$ ist.

Eine Möglichkeit, r-Lokalität syntaktisch zu erzwingen, besteht darin, explizit sämtliche Quantoren einer Formel auf die r-Nachbarschaft von $\vec{x}$ einzuschränken. Dies wird durch die folgende Definition formalisiert.

Definition 4.5 (r-Relativierung)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\varphi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\emptyset \neq frei(\varphi) = \{\vec{x}\}$, und sei $r \in \mathbb{N}$.

Die r-Relativierung von φ um $\vec{x}$ ist die Formel

$$\varphi^{N_r(\vec{x})}(\vec{x}),$$

die aus $\varphi(\vec{x})$ entsteht, indem zunächst alle durch Quantoren gebundenen Variablen so umbenannt werden, dass sie von $\vec{x}$ verschieden sind, und danach jede Teilformel der Form

- $\exists z\, \varphi$ durch $\exists z\, (\mathrm{dist}(z, \vec{x}) \leq r \wedge \varphi)$
- $\forall z\, \varphi$ durch $\forall z\, (\mathrm{dist}(z, \vec{x}) \leq r \rightarrow \varphi)$

ersetzt wird.

Offensichtlich gilt:

Lemma 4.6 ("r-Relativierungen sind r-lokal")

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\psi(\vec{x})$ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel mit ~~$\emptyset \neq$~~ $\mathrm{frei}(\psi) = \{\vec{x}\}$ und sei $r \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: Die r-Relativierung $\psi^{N_r(\vec{x})}(\vec{x})$ ist r-lokal um $\vec{x}$, und es gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und alle $\vec{a} \in A$, dass

$$\mathfrak{A} \models \psi^{N_r(\vec{x})}[\vec{a}] \iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi^{N_r(\vec{x})}[\vec{a}]$$

$$\iff \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \models \psi[\vec{a}].$$

Beweis: Übung.

Die obige Definition 4.3 von lokalen Formeln spricht nur über Formeln, die freie Variablen besitzen. Als nächstes führen wir auch einen Lokalitäts-Begriff für Sätze ein, d.h. für Formeln, die keine freien Variablen besitzen.

Definition 4.7 (basis-lokale Sätze)

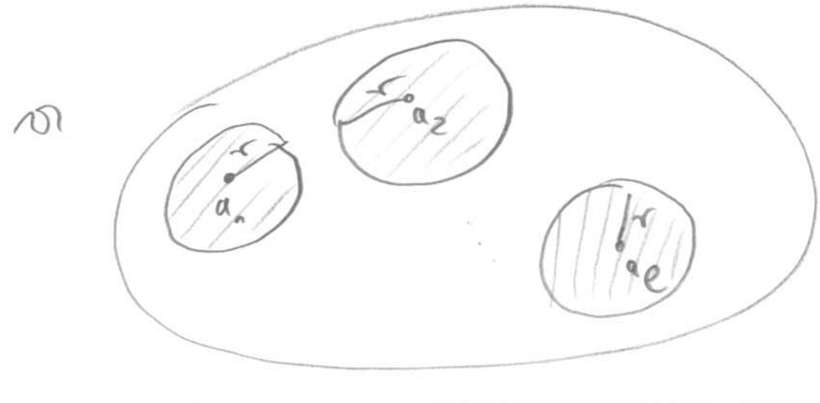
Sei σ eine endliche relationale Signatur und seien $\ell, r \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq 1$.

Ein FO[σ]-Satz χ heißt basis-lokal (mit Parametern ℓ, r), falls χ von der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq \ell} \operatorname{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \psi(x_i) \right) \right)$$

ist, wobei $\psi(x)$ eine FO[σ]-Formel ist, die r-lokal um x ist.

Skizze:



Ein basis-lokaler Satz χ besagt also, dass es mindestens ℓ Elemente $x_1, \dots, x_\ell$ gibt, deren r-Nachbarschaften paarweise disjunkt sind und allesamt die Formel ψ erfüllen.

Definition 4.8

Sei M eine Menge von Formeln.
Die Menge BC(M) aller Booleschen Kombinationen von Formeln aus M ist rekursiv wie folgt definiert:

- für jedes $\varphi \in M$ gilt: $\varphi \in BC(M)$
- für jedes $\varphi \in BC(M)$ gilt: $\neg\varphi \in BC(M)$
- für jedes $\varphi \in BC(M)$ und $\psi \in BC(M)$ und für alle $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gilt: $(\varphi * \psi) \in BC(M)$.

Definition 4.9 (Gaifman-Normalform)

Sei σ eine endliche relationale Signatur

(a) Ein FO[σ]-Satz φ ist in Gaifman-Normalform (kurz: GNF), falls φ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen FO[σ]-Sätzen ist.

(b) Eine FO[σ]-Formel $\varphi(\vec{x})$ mit $\emptyset \neq \text{frei}(\varphi) = \{\vec{x}\}$ ist in Gaifman-Normalform (kurz: GNF), falls $\varphi(\vec{x})$ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen FO[σ]-Sätzen ist und von Formeln, die lokal um $\vec{x}$ sind.

Beispiel 4.10

Sei $\sigma := \{\underset{2}{E}, \underset{1}{R}, \underset{1}{B}\}$.

Der FO[σ]-Satz

$$\varphi := \exists y \exists z \left(\neg E(y,z) \wedge R(y) \wedge B(z) \right)$$

ist nicht in GNF.

Der $FO[\sigma]$-Satz

$\tilde{\varphi} :=$

$$\underbrace{\exists x \left(\overbrace{\exists y \exists z \left(dist(y,x) \leq 2 \wedge dist(z,x) \leq 2 \wedge \neg E(y,z) \wedge R(y) \wedge B(z) \right)}^{\text{2-lokal um } x} \right)}_{\text{basis-lokaler Satz}}$$

$$\vee$$

$$\Big(\underbrace{\exists x_1 \exists x_2 \left(dist(x_1,x_2) > 2 \wedge (R(x_1) \vee B(x_1)) \wedge (R(x_2) \vee B(x_2)) \right)}_{\text{basis-lokaler Satz}}$$

$$\wedge$$

$$\underbrace{\exists x\, R(x)}_{} \wedge \underbrace{\exists x\, B(x)}_{} \Big)$$

basis-lokale Sätze

ist in GNF.

Außerdem gilt: $\tilde{\varphi}$ ist äquivalent zu φ.

Wir können nun den Satz von Gaifman angeben und beweisen:

<u>Satz 4.11</u> (Satz von Gaifman, 1981)

Sei σ eine endliche relationale Signatur.
Jede FO[σ]-Formel ist äquivalent zu einer FO[σ]-Formel in Gaifman-Normalform.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der bei Eingabe einer FO[σ]-Formel φ eine zu φ äquivalente FO[σ]-Formel $\hat{\varphi}$ in Gaifman-Normalform berechnet.

<u>Beweis:</u> Wir geben hier den Originalbeweis von Gaifman an, der per Induktion über den Aufbau von FO[σ]-Formeln vorgeht.

<u>Induktionsanfang:</u>
φ ist eine atomare FO[σ]-Formel, d.h.
φ ist von der Form $x_1 = x_2$ (mit $x_1, x_2 \in Var$)
oder von der Form $R(x_1, \ldots, x_k)$ (mit $R \in \sigma$, $k = ar(R)$, $x_1, \ldots, x_k \in Var$).
Offensichtlich ist φ dann 0-lokal um x_1, x_2 bzw. um $x_1, \ldots, x_k$, und daher ist φ insbesondere in GNF.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $\neg\varphi'$.

Gemäß Induktionsannahme ist φ' äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}'$ in GNF.
Offensichtlich ist dann $\neg\tilde{\varphi}'$ eine zu φ äquivalente Formel in GNF.

Fall 2: φ ist von der Form $(\varphi_1 * \varphi_2)$ für ein $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

Analog zu Fall 1.

Fall 3: φ ist von der Form $\forall y\, \varphi'$

Dann ist φ äquivalent zur Formel $\neg\exists y \neg\varphi'$.
Daher kann Fall 3 durch eine Kombination von Fall 1 und dem folgenden Fall 4 gelöst werden.

Fall 4: φ ist von der Form $\exists y\, \varphi'$.

Gemäß Induktionsannahme ist φ' äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}'$ in GNF.
Gemäß Definition 4.9 ist $\tilde{\varphi}'$ eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen und von

Formeln, die lokal um $\vec{x}, y$ sind, wobei $\vec{x}, y$ die freien Variablen von φ' bezeichnen.

OBdA (Details dazu: Übung) ist diese Boolesche Kombination in <u>disjunktiver Normalform</u>, so dass $\tilde{\varphi}'$ von der Form

$$\bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right)$$

ist, wobei I eine geeignete endliche Indexmenge ist und, für jedes $i \in I$, χ_i eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen ist, und $\psi_i(\vec{x}, y)$ eine lokale Formel um $\vec{x}, y$ ist (beachte dazu: Boolesche Kombinationen von lokalen Formeln sind selbst wieder lokal).

Insbesondere gilt für die Formel $\varphi \stackrel{\text{Def}}{=} \exists y\, \varphi'$, dass

$$\begin{aligned} & \varphi \\ \equiv\ & \exists y \bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right) \\ \equiv\ & \bigvee_{i \in I} \exists y \left(\chi_i \wedge \psi_i(\vec{x}, y) \right) \\ \equiv\ & \bigvee_{i \in I} \left(\chi_i \wedge \exists y\, \psi_i(\vec{x}, y) \right) \end{aligned}$$

(die letzte Äquivalenz gilt, da χ_i ein Satz ist und daher insbes. $y \notin \text{frei}(\chi_i)$ ist).

Zum Abschluss von Fall 4 genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass für jedes $i \in I$ die Formel $\exists y\, \psi_i(\vec{x}, y)$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist. Sei also $i \in I$ beliebig.
Wir schreiben im Folgenden kurz $\psi(\vec{x}, y)$, um die Formel $\psi_i(\vec{x}, y)$ zu bezeichnen.

Wir wissen bereits, dass $\psi(\vec{x}, y)$ lokal um $\vec{x}, y$ ist, d.h. es gibt eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, so dass $\psi(\vec{x}, y)$ r-lokal um $\vec{x}, y$ ist.

Falls $\vec{x}$ das leere Tupel ist, so ist $\psi(\vec{x}, y)$ einfach die Formel $\psi(y)$, die r-lokal um y ist.
Gemäß Definition 4.7 ist die Formel $\exists y\, \psi(y)$ daher ein basis-lokaler Satz und damit insbes. in GNF.

Falls $\vec{x}$ ein nicht-leeres Tupel ist, so gilt offensichtlicherweise:

$$\exists y\, \psi(\vec{x},y)$$

$$\equiv \underbrace{\exists y\, \big(dist(y,\vec{x}) \leq 2r+1 \wedge \psi(\vec{x},y) \big)}_{=:\, \vartheta_1(\vec{x})}$$

$$\vee \underbrace{\exists y\, \big(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \wedge \psi(\vec{x},y) \big)}_{=:\, \vartheta_2(\vec{x})}$$

Zum Abschluss von Fall 4 genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass jede der beiden Formeln $\vartheta_1(\vec{x})$ und $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist.

Wir betrachten zunächst die Formel $\vartheta_1(\vec{x})$ und stellen fest, dass sie lokal um $\vec{x}$ ist:

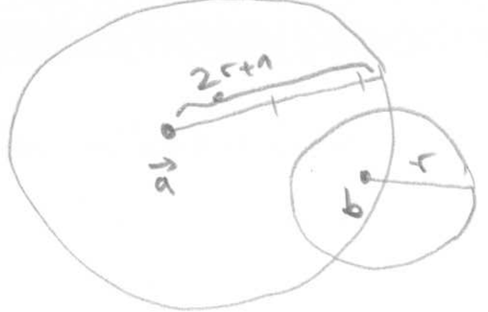
Sei dazu $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$. Da $\psi(\vec{x},y)$ r-lokal um $\vec{x},y$ ist, wissen wir, dass folgendes gilt:

$$\mathfrak{A} \models \vartheta_1[\vec{a}] \iff \text{es gibt ein } b \in N^{\mathfrak{A}}_{2r+1}(\vec{a}) \text{ so dass}$$
$$\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_r(\vec{a},b) \models \psi[\vec{a},b].$$

Ferner wissen wir, dass $N^{\mathfrak{A}}_r(\vec{a},b) = N^{\mathfrak{A}}_r(\vec{a}) \cup N^{\mathfrak{A}}_r(b)$.

Für $b \in N^{\mathfrak{A}}_{2r+1}(\vec{a})$ ist außerdem $N^{\mathfrak{A}}_r(b) \subseteq N^{\mathfrak{A}}_{3r+1}(\vec{a})$.

Skizze:



Daher: $N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) \subseteq N_{3r+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$

Daraus folgt unmittelbar, dass die Formel $\vartheta_1(\vec{x})$ $(3r+1)$-lokal um $\vec{x}$ ist.

Insbes. ist $\vartheta_1(\vec{x})$ also in GNF.

Wir betrachten nun die Formel $\vartheta_2(\vec{x})$:

Sei dazu wieder $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$.

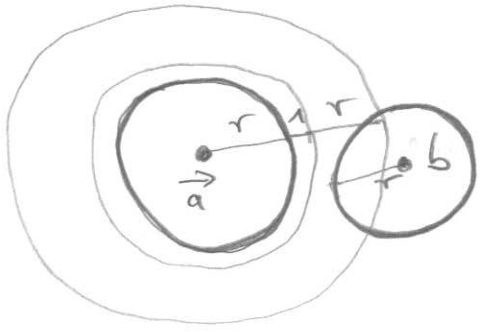
Für jedes $b \in A$ mit $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \vec{a}) > 2r+1$ gilt insbes.:

$N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \cap N_r^{\mathfrak{A}}(b) = \emptyset$

und für alle

$u \in N_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ und $v \in N_r^{\mathfrak{A}}(b)$

ist $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u, v) > 1$.



Daher ist die Struktur $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b)$ die disjunkte Vereinigung der Strukturen $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ und $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$,

kurz: $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, b) = \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \sqcup \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$.

Da $\psi(\vec{x}, y)$ r-lokal um $\vec{x}, y$ ist, hängt die Gültigkeit von $\psi[\vec{a}, b]$ in $\mathfrak{A}$ nur von $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \sqcup \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(b)$ ab.

Eingeschränkt auf σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit Belegungen $\vec{a}$ und b so dass $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \vec{a}) > 2r+1$ ist, ist daher die Formel $\psi(\vec{x}, y)$ äquivalent zu einer Booleschen Kombination von

(i) Formeln, die r-lokal um $\vec{x}$ sind, und

(ii) Formeln, die r-lokal um y sind

(detaillierte Begründung: Übung!).

O.B.d.A. ist diese Boolesche Kombination in disjunktiver Normalform, so dass $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent ist zu einer Formel der Form

$$(*)_1 \quad \exists y \Big(\mathrm{dist}(y, \vec{x}) > 2r+1 \;\wedge\; \bigvee_{j \in J} \big(\gamma_j(\vec{x}) \wedge \delta_j(y) \big) \Big),$$

wobei J eine geeignete endliche Indexmenge ist und, für jedes $j \in J$, $\gamma_j(\vec{x})$ eine r-lokale Formel um $\vec{x}$ und $\delta_j(y)$ eine r-lokale Formel um y ist.

Offensichtlich ist die Formel aus $\circledast_1$

äquivalent zu

$$\circledast_2 \quad \bigvee_{j\in J} \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \wedge \gamma_j(\vec{x}) \wedge \delta_j(y) \right).$$

Da die Variable y nicht frei in $\gamma_j(\vec{x})$ vorkommt, ist die Formel aus $\circledast_2$ wiederum äquivalent zu

$$\bigvee_{j\in J} \left(\gamma_j(\vec{x}) \wedge \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \wedge \delta_j(y) \right) \right).$$

Wir wissen bereits, dass jede der Formeln $\gamma_j(\vec{x})$ lokal um $\vec{x}$ und damit insbes. in GNF ist.

Zum Nachweis, dass die Formel $\vartheta_2(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel in GNF ist, genügt es daher, im Folgenden zu zeigen, dass für jedes $j\in J$ die Formel $\exists y \left(dist(y,\vec{x}) > 2r+1 \wedge \delta_j(y) \right)$

äquivalent zu einer Formel in GNF ist.

Sei also $j\in J$ beliebig.

Wir schreiben im Folgenden kurz $\delta(y)$, um die Formel $\delta_j(y)$ zu bezeichnen, und wir setzen

$$\hat{r} := 2r+1 \quad \text{und} \quad \mu(\vec{x}) := \exists y \left(dist(y,\vec{x}) > \hat{r} \wedge \delta(y) \right).$$

Wir wissen bereits, dass $\delta(y)$ r-lokal um x ist.

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass die Formel

$$\mu(\vec{x}) := \exists y \left(dist(y, \vec{x}) > r' \wedge \delta(y) \right)$$

äquivalent zu einer Formel in GNF ist

(... und dies ist der anspruchsvollste Teil im ganzen Beweis des Satzes von Gaifman).

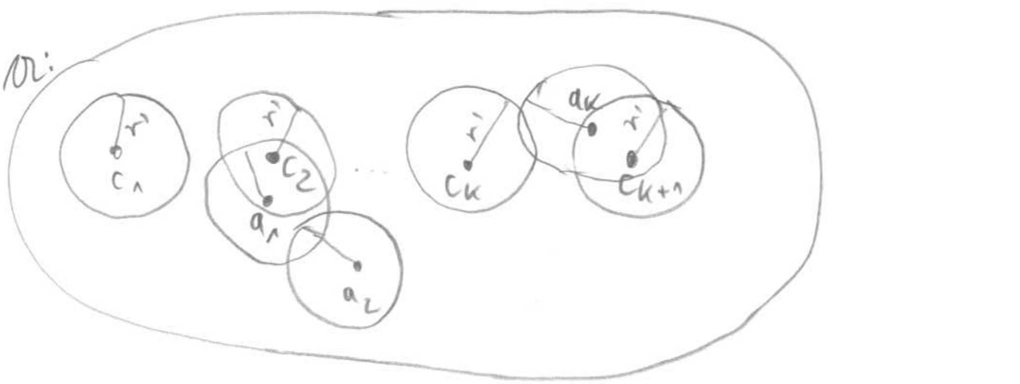
Sei dazu $k \geq 1$ die Länge des Tupels $\vec{x}$, d.h. $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$.

Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur und sei $\vec{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ eine Belegung für $\vec{x}$.

Im Folgenden versuchen wir, zu verstehen, wann genau $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$ gilt.

<u>Beobachtung 1</u>: Falls es $k+1$ verschiedene Elemente $c_1, \dots, c_{k+1} \in A$ gibt, die paarweisen Abstand $> 2r'$ voneinander haben, so dass für alle $j \in \{1, \dots, k+1\}$ $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ gilt, so gilt auch $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$,

denn:



Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt: $N_{r'}^{\mathfrak{A}}(a_i)$ enthält höchstens eins der Elemente $c_1, \dots, c_k, c_{k+1}$.

Daher gibt es ein $j \in \{1, \dots, k+1\}$ so dass

$$c_j \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$$

Für dieses c_j gilt also: $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}, c_j) > r'$ und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$. Daher gilt $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

□ Beobachtg 1

Die Voraussetzung in Beobachtung 1 lässt sich offensichtlicherweise durch den basis-lokalen Satz

$$\chi_{k+1} := \exists z_1 \dots \exists z_{k+1} \left(\left(\bigwedge_{1 \le i < j \le k+1} \mathrm{dist}(z_i, z_j) > 2r' \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k+1} \delta(z_i) \right)$$

beschreiben.

Analog zu χ_{k+1} definieren wir für jedes $\ell \in \{1, \dots, k+1\}$ den basis-lokalen Satz

$$(*)_3 \quad \chi_\ell := \exists z_1 \dots \exists z_\ell \left(\left(\bigwedge_{1 \le i < j \le \ell} \mathrm{dist}(z_i, z_j) > 2r' \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} \delta(z_i) \right).$$

Beobachtung 1 bedeutet, dass $\chi_{k+1} \models \mu(\vec{x})$.

Aber natürlich könnte $\mu(\vec{x})$ auch dann in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ für eine Belegung $\vec{a}$ erfüllt sein, wenn χ_{k+1} nicht gilt.

Sei $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{0,1,\dots,k+1\}$ folgendermaßen gewählt:

$$\ell_{\mathfrak{A}} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathfrak{A} \not\models \chi_1 \\ \max\{\ell \in \{1,\dots,k+1\} : \mathfrak{A} \models \chi_\ell\} \end{cases}$$

<u>Beobachtung 2</u>: Falls $\ell_{\mathfrak{A}} = k+1$, so gilt $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$

<u>Beobachtung 3</u>: Falls $\ell_{\mathfrak{A}} = 0$, so gilt: $\mathfrak{A} \not\models \exists y\, \delta(y)$, und daher auch $\mathfrak{A} \not\models \mu[\vec{a}]$.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{1,\dots,k\}$ ist. Gemäß der Wahl von $\ell_{\mathfrak{A}}$ wissen wir, dass $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ und $\mathfrak{A} \not\models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}+1}$.

<u>Fall I</u>: Es gibt <u>keine</u> $c_1,\dots,c_{\ell_{\mathfrak{A}}} \in N^{\mathfrak{A}}_{r'}(\vec{a})$, so dass $c_1,\dots,c_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ paarweise den Abstand $>2r'$ voneinander haben und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ für alle $j \in \{1,\dots,\ell_{\mathfrak{A}}\}$.

Wegen $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ können wir dann folgern, dass es mindestens ein $b \in A$ mit $b \notin N^{\mathfrak{A}}_{r'}(\vec{a})$ geben muss, für das $\delta[b]$ gilt.
In Fall I gilt also: $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

<u>Fall II</u>: Es gibt ein $b \in N^{\mathfrak{A}}_{3r'}(\vec{a})$, so dass $b \notin N^{\mathfrak{A}}_{r'}(\vec{a})$ und $\mathfrak{A} \models \delta[b]$.
Dann gilt offensichtlicherweise, dass $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$.

Fall III: Es gilt weder Fall I noch Fall II. D.h.:

(I): Es gibt $c_1, \dots, c_{\ell_\mathfrak{A}} \in N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$, so dass $c_1, \dots, c_{\ell_\mathfrak{A}}$ paarweise den Abstand $> 2r'$ voneinander haben und $\mathfrak{A} \models \delta[c_j]$ für alle $j \in \{1, \dots, \ell_\mathfrak{A}\}$, und

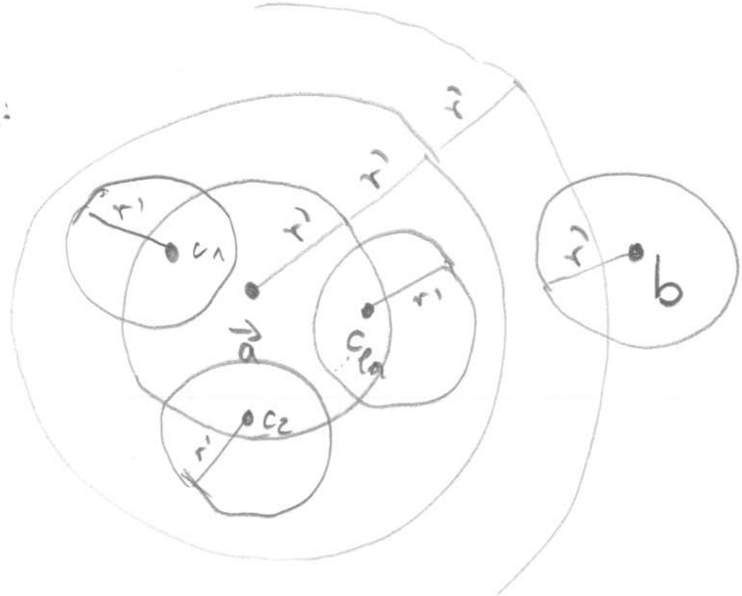
(II): es gibt kein $b \in N_{3r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ mit $\mathfrak{A} \models \delta[b]$ und $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Dann gilt: $\mathfrak{A} \not\models \mu[\vec{a}]$, denn:

Angenommen, $\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$, dann gibt es ein $b \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \delta[b]$ und $b \notin N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Wegen (II) gilt: $b \notin N_{3r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$.

Skizze:



Wegen $c_1, \dots, c_{\ell_\mathfrak{A}} \in N_{r'}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})$ folgt: $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(b, \{c_1, \dots, c_{\ell_\mathfrak{A}}\}) > 2r'$.

Somit sind $c_1, \dots, c_{\ell_\mathfrak{A}}, b$ $\ell_\mathfrak{A}+1$ Elemente vom paarweisen Abstand $> 2r'$, die alle die Formel $\delta(y)$ erfüllen.

Daher gilt: $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_\mathfrak{A}+1}$. ↯ Widerspruch zur Wahl von $\ell_\mathfrak{A}$ $\square_{\text{Fall III}}$.

Insgesamt wissen wir nun, dass für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und jede Belegung $\vec{a} \in A$ gilt:

$\mathfrak{A} \models \mu[\vec{a}]$

$\iff$ • $\mathfrak{A} \models \chi_{k+1}$ oder

• es gibt ein $\ell_{\mathfrak{A}} \in \{1,\dots,k\}$ so dass $\mathfrak{A} \models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}}$ und $\mathfrak{A} \not\models \chi_{\ell_{\mathfrak{A}}+1}$ und es gilt Fall I oder Fall II.

$\circledast_4$

(„$\Leftarrow$" folgt aus Beobachtung 2 und Fall I und Fall II; „$\Rightarrow$" folgt (per Kontraposition) aus Beobachtung 3 und Fall III).

Fall I lässt sich offensichtlicherweise durch die folgende Formel $\varkappa_{\ell_{\mathfrak{A}},I}(\vec{x})$ beschreiben:

$$\varkappa_{\ell_{\mathfrak{A}},I}(\vec{x}) := \neg\, \exists z_1 \cdots \exists z_{\ell_{\mathfrak{A}}} \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell_{\mathfrak{A}}} dist(z_i,\vec{x}) \le r' \ \wedge \bigwedge_{1\le i<j\le \ell_{\mathfrak{A}}} dist(z_i,z_j) > 2r' \ \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell_{\mathfrak{A}}} \delta(z_i) \Big)$$

Man sieht leicht, dass diese Formel lokal um $\vec{x}$ ist (genauer gesagt: $(r'+r)$-lokal)

Fall II lässt sich durch die Formel

$$\varkappa_{\ell_{\mathfrak{A}},II}(\vec{x}) := \exists z \big(dist(z,\vec{x}) \le 3r' \wedge dist(z,\vec{x}) > r' \wedge \delta(z) \big)$$

beschreiben. Klar: $\varkappa_{\ell_{\mathfrak{A}},II}$ ist lokal um $\vec{x}$ (genauer: $(3r'+r)$-lokal).

Aus $\circledast_4$ folgt, dass die Formel $\mu(\vec{x})$ äquivalent ist zur Formel

$$\chi_{k+1} \vee \bigvee_{\ell=1}^{k} \Big(\chi_\ell \wedge \neg\chi_{\ell+1} \wedge \big(\varkappa_{\ell,\mathrm{I}}(\vec{x}) \vee \varkappa_{\ell,\mathrm{II}}(\vec{x}) \big) \Big);$$

und dies ist eine Formel in GNF.

Damit ist nun (endlich) Fall 4 des Beweises des Satzes von Gaifman abgeschlossen.

Insgesamt haben wir per Induktion nach dem Aufbau von FO[σ]-Formeln gezeigt, dass jede FO[σ]-Formel äquivalent zu einer Formel in GNF ist.

Außerdem führt der obige Beweis unmittelbar zu einem Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel φ eine zu φ äquivalente Formel in GNF berechnet.

Dies schließt den Beweis des Satzes von Gaifman ab.

$\square$

Ein alternativer Beweis, der nicht per Induktion nach dem Formelaufbau, sondern durch Verwendung von EF-Spielen bzw. Hin- und Her-Systemen vorgeht, wird in Gaifmans Originalarbeit skizziert und im Buch von Ebbinghaus und Flum ausführlich dargestellt. Dieser "modelltheoretische" Beweis liefert allerdings nicht unmittelbar einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Formel eine äquivalente Formel in GNF berechnet.

Im Folgenden werden 2 Anwendungsbereiche des Satzes von Gaifman vorgestellt:

(1) Nicht-Ausdrückbarkeits-Resultate:

Der Satz von Gaifman liefert ein Werkzeug, um zu zeigen, dass bestimmte Eigenschaften und Anfragen nicht in der Logik erster Stufe formalisiert werden können: die Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe. (Details: in Kapitel 4.2)

(2) Algorithmische Meta-Theoreme:

Die Transformation in Gaifman-Normalform kann oft als erster Schritt verwendet werden, um effiziente Algorithmen für Berechnungsprobleme, die durch FO-Formeln gegeben sind, zu entwickeln (Details: in Kapitel 4.3).

4.2 Die Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe

Definition 4.12: (Anfragen)

Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(a) Eine k-stellige Anfrage ist eine Abbildung q, die jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine k-stellige Relation $q(\mathfrak{A}) \subseteq A^k$ zuordnet.

(b) Sei S eine Klasse von σ-Strukturen. Eine k-stellige Anfrage q heißt FO-definierbar auf S, falls es eine FO$[\sigma]$-Formel $\varphi(\vec{x})$ mit freien Variablen $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A} \in S$ gilt:
$$q(\mathfrak{A}) = \{ \vec{a} \in A^k : \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \}.$$

Beispiel 4.13

Sei $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$.

Die 1-stellige Anfrage Isolierte-Punkte, die jedem Graphen $G = (V,E)$ die Menge

$$\text{Isolierte-Punkte}(G) := \left\{ v \in V : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \\ \text{keine Kante} \\ \text{von oder zu } v \end{array} \right\}$$

ist FO-definierbar (auf der Klasse aller Graphen) durch die Formel

$$\varphi(x) := \neg \exists y \, (E(x,y) \vee E(y,x)) .$$

In Definition 3.29 haben wir bereits den Begriff der Hanf-Lokalität (als Eigenschaft von Strukturklassen) kennengelernt. Ein etwas anderer Lokalitätsbegriff, der sich nicht auf Strukturklassen, sondern auf Anfragen bezieht, ist die folgendermaßen definierte Gaifman-Lokalität:

Definition 4.14 (Gaifman-Lokalität)

Sei σ eine relationale Signatur, sei S eine Klasse von σ-Strukturen, und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Eine k-stellige Anfrage q heißt **Gaifman-lokal auf S**, falls es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A} \in S$ und alle $\vec{a} \in A^k$ und alle $\vec{b} \in A^k$ gilt:

Falls $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$, so

$$\vec{a} \in q(\mathfrak{A}) \iff \vec{b} \in q(\mathfrak{A}).$$

Aus dem Satz von Gaifman folgt unmittelbar, dass die Logik erster Stufe nur Gaifman-lokale Anfragen definieren kann:

Satz 4.15 (Gaifman-Lokalität der Logik erster Stufe)

Für jede endliche relationale Signatur σ und jede Klasse S von σ-Strukturen gilt:

Alle Anfragen, die FO-definierbar auf S sind, sind Gaifman-lokal auf S.

Beweis:

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sei $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$, sei $\varphi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel und sei q die von $\varphi(\vec{x})$ auf S definierte k-stellige Anfrage.

Gemäß dem Satz von Gaifman ist $\varphi(\vec{x})$ äquivalent zu einer Formel $\varphi'(\vec{x})$ in GNF.

D.h. $\varphi'(\vec{x})$ ist eine Boolesche Kombination von basis-lokalen Sätzen $\chi_1, \dots, \chi_s$ und lokalen Formeln $\psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_t(\vec{x})$, für geeignete $s, t \in \mathbb{N}$.

Seien $r, m \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass jede der Formeln $\psi_i(\vec{x})$ r-lokal um $\vec{x}$ ist und eine Quantorentiefe $\leq m$ hat.

Betrachte nun eine beliebige Struktur $\mathfrak{A} \in S$ und beliebige Tupel $\vec{a} \in A^k$ und $\vec{b} \in A^k$, so dass $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$.

Wir müssen zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi'[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi'[\vec{b}].$$

Da φ' eine Boolesche Kombination der Formeln $\chi_1, \dots, \chi_s, \psi_1(\vec{x}), \dots, \psi_t(\vec{x})$ ist, genügt es, folgendes zu zeigen:

(1) f.a. $i \in \{1, \dots, s\}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \chi_i[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \chi_i[\vec{b}]$

und

(2) f.a. $i \in \{1, \dots, t\}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi_i[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \psi_i[\vec{b}]$

Punkt (1) gilt, da χ_i ein Satz ist und daher nicht von $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ abhängt.

Punkt (2) gilt, da $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) \equiv_m \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{b})$ ist, der Quantorenrang von $\psi_i(\vec{x})$ kleiner oder gleich m ist und $\psi_i(\vec{x})$ r-lokal um $\vec{x}$ ist.

$\square$

Bemerkung 4.16

Indem man zeigt, dass eine Anfrage <u>nicht Gaifman-lokal</u> ist, kann man (unter Verwendung von Satz 4.15) folgern, dass die Anfrage <u>nicht FO-definierbar</u> ist.

Beispiel 4.17

Die <u>Erreichbarkeits-Anfrage</u> E^*, die jedem endlichen Graphen $G = (V, E)$ die Relation

$$E^*(G) := \left\{ (v,w) \in V \times V : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G \\ \text{einen Weg von } v \text{ nach } w \end{array} \right\}$$

zuordnet, ist <u>nicht</u> Gaifman-lokal auf der Klasse aller endlichen Graphen und daher laut Satz 4.15 auch nicht FO-definierbar auf der Klasse aller endlichen Graphen.

<u>Beweis</u>:

Um zu zeigen, dass die Erreichbarkeits-Anfrage nicht Gaifman-lokal ist, genügt es, für alle Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ einen endlichen Graphen $G_{r,m}$ und Knoten $a_1, a_2 \in V$ und $b_1, b_2 \in V$ anzugeben, so dass gilt:

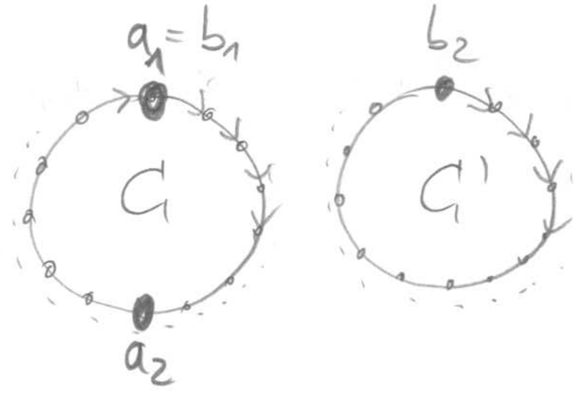
(1) $\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(a_1, a_2) \equiv_m \mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(b_1, b_2)$,

(2) es gibt in $G_{r,m}$ einen Weg von a_1 nach a_2, und

(3) es gibt in $G_{r,m}$ keinen Weg von b_1 nach b_2.

Sei dazu $G_{r,m}$ der Graph, der aus 2 disjunkten gerichteten Kreisen C und C' auf je $\begin{matrix} 2(2r+1)+2 \\ = 4r+4 \end{matrix}$ Knoten besteht

Skizze: $G_{r,m}$



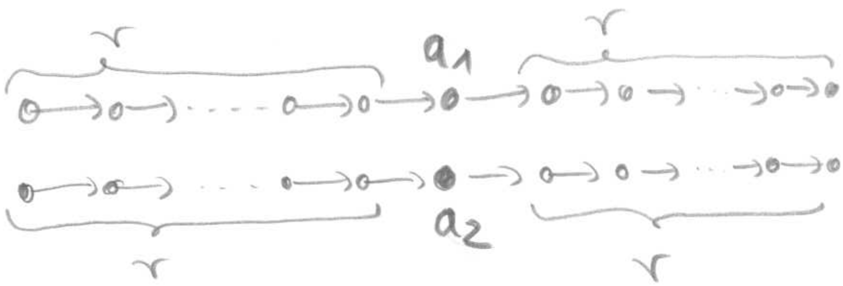
Ferner seien a_1 und a_2 zwei Knoten auf C vom Abstand $\mathrm{Dist}^{G}(a_1, a_2) > 2r+1$.
Sei $b_1 := a_1$ und sei b_2 ein beliebiger Knoten auf C'.

Damit gilt (2) und (3) (d.h. es gibt in $G_{r,m}$ einen Weg von a_1 nach a_2, aber es gibt keinen Weg von b_1 nach b_2).

Außerdem ist $\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(a_1,a_2)$ die disjunkte Vereinigung von zwei gerichteten Pfaden der Länge $2r+1$, so dass a_1 und a_2 die Mittelpunkte der beiden Pfade sind.

Skizze:

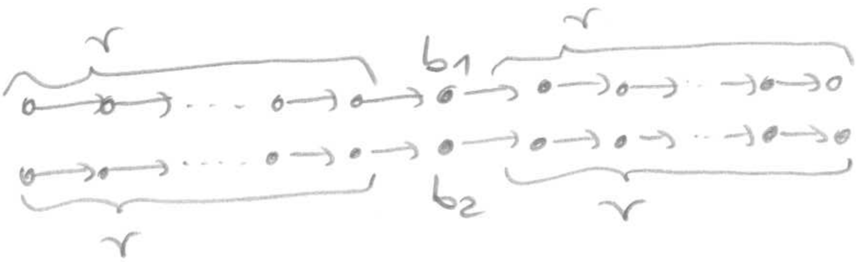
$\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(a_1,a_2)$:



Außerdem ist $\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(b_1,b_2)$ von der gleichen Form.

Skizze:

$\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(b_1,b_2)$:



Somit gilt also: $\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(a_1,a_2) \cong \mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(b_1,b_2)$,

und insbes gilt auch f.a. $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(a_1,a_2) \equiv_m \mathcal{N}_r^{G_{r,m}}(b_1,b_2).$$

Somit ist auch (1) erfüllt.

$\square$

4.3 Der Satz von Seese über Klassen von Graphen von beschränktem Grad

Definition 4.18 (Klassen von Graphen von beschränktem Grad)

(a) Sei G ein Graph.
Der Grad eines Knotens v von G ist die Anzahl aller Kanten, die v als Ausgangpunkt oder Endpunkt haben.
Der Grad von G ist der maximale Grad eines Knotens von G.

(b) Sei C eine Klasse von Graphen und sei $d \in \mathbb{N}$.
C ist eine Klasse von Graphen vom Grad $\leq d$, falls jeder Graph $G \in C$ Grad $\leq d$ hat.

(c) C ist eine Klasse von Graphen von beschränktem Grad, falls es eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ gibt, so dass C eine Klasse von Graphen vom Grad $\leq d$ ist.

Satz 4.19 (Seese, 1996)

Für jedes $d \in \mathbb{N}$ gibt es eine berechenbare Funktion $f_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass das

Auswertungsproblem für FO auf der Klasse aller endlichen Graphen vom Grad $\leq d$

Eingabe: Ein endlicher Graph G vom Grad $\leq d$ und ein FO[$\{E\}$]-Satz φ

Frage: Gilt $G \models \varphi$?

in Zeit $f_d(k) \cdot n$ gelöst werden kann, wobei k die Länge der Formel φ und n die Größe (einer geeigneten Kodierung) des Graphen G bezeichnet (etwa: $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$).

Das heißt: Für jeden festen FO[$\{E\}$]-Satz φ ist das Problem, zu gegebenem Graphen G vom Grad $\leq d$ zu entscheiden, ob $G \models \varphi$, in Linearzeit lösbar. (Man vergleiche dies mit Satz 3.7 und Satz 3.9 !)

<u>Beweis:</u>

Seeses Originalbeweis argumentiert unter Verwendung des Satzes von Hanf. Wir werden hier im Folgenden einen auf dem Satz von Gaifman basierenden Beweis geben, der (im Gegensatz zu dem Hanf-basierten Ansatz) den Vorteil hat, dass er auch auf andere Klassen von Strukturen übertragen werden kann (siehe den folgenden Satz 4.20).

Sei $d \in \mathbb{N}$ fest, sei φ der gegebene $FO[\{E\}]$-Satz und sei $G = (V^G, E^G)$ der gegebene Graph vom Grad $\leq d$. Sei $n := |V^G| + |E^G|$.

Zunächst benutzen wir den Algorithmus aus dem Satz von Gaifman, um φ in einen äquivalenten Satz φ' in Gaifman-Normalform zu übersetzen. Dann testen wir für jeden einzelnen basis-lokalen Satz χ, der in φ' vorkommt, ob $G \models \chi$. Am Ende können wir dann die Resultate für die einzelnen basis-lokalen Sätze χ einfach kombinieren, um zu ermitteln, ob $G \models \varphi$?.

Sei im Folgenden χ ein basis-lokaler Satz der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \left(\left(\bigwedge_{1 \le i < j \le \ell} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \psi(x_i) \right) \right)$$

wobei $\ell, r \in \mathbb{N}$ und $\psi(x)$ r-lokal um x ist.

Natürlich gilt $G \models \chi$ genau dann, wenn es mindestens ℓ Knoten vom paarweisen Abstand $> 2r$ in G gibt, so dass die r-Nachbarschaften dieser ℓ Knoten allesamt die r-lokale Formel ψ erfüllen.

Um zu entscheiden, ob $G \models \chi$, gehen wir in 2 Schritten vor:

<u>Schritt 1</u>: Bestimme für jeden Knoten $v \in V^G$, ob $\mathcal{N}_r^G(v) \models \psi[v]$, und markiere diejenigen Knoten v, für die $\mathcal{N}_r^G(v) \models \psi[v]$ gilt, als <u>rot</u>.

<u>Schritt 2</u>: Entscheide, ob es in G ℓ <u>rote</u> Knoten vom paarweisen Abstand $> 2r$ gibt.

Zum Lösen von Schritt 1 beachte, dass für jeden Knoten v in einem Graphen G vom Grad $\leq d$ gilt:

$$|N_r^G(v)| \leq \underbrace{1}_{\text{Abstand } 0} + \underbrace{d}_{\text{Abstand } 1} + \underbrace{d^2}_{\text{Abstand } 2} + \cdots + \underbrace{d^r}_{\text{Abstand } r} \leq d^{r+1}.$$

D.h.: Die Größe von $N_r^G(v)$ hängt nicht von der Größe von G ab, sondern nur von den Zahlen d und r.

Schritt 1 kann daher folgendermaßen gelöst werden:

<u>Algorithmus 1</u>:

for $v \in V^G$ do
    berechne $\mathcal{N}_r^G(v)$
    teste, ob $\mathcal{N}_r^G(v) \models \psi[v]$
    if $\mathcal{N}_r^G(v) \models \psi[v]$ then markiere v als <u>rot</u>
end for

Jede der Zeilen 2–4 wird $|V^G|$-mal durchlaufen.

Für jeden einzelnen Durchlauf durch Zeile 2 wird Zeit $\leq f_d^{(1)}(r)$ gebraucht (für eine geeignete Funktion $f_d^{(1)}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), da $|N_r^G(v)| \leq d^{r+1}$ ist.

Für jeden einzelnen Durchlauf durch Zeile 3 wird Zeit $\leq f_d^{(2)}(r, \underbrace{\|\varphi\|}_{\text{die Länge von } \varphi})$ gebraucht

(für eine geeignete Funktion $f_d^{(2)}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), da $|N_r^G(v)| \leq d^{r+1}$ ist.

Für jeden einzelnen Durchlauf durch Zeile 4 wird Zeit $O(1)$ gebraucht.

Insgesamt benötigt Algorithmus 1 also bei Eingabe eines Graphen G vom Grad $\leq d$ und einer r-lokalen Formel $\varphi(x)$ also Zeit $\leq f_d^{(3)}(r, \|\varphi\|) \cdot n$, wobei $f_d^{(3)}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine geeignete Funktion ist.

Zum Lösen von Schritt 2 müssen wir nun noch ℓ <u>rote</u> Knoten vom paarweisen Abstand $> 2r$ finden. Dies wird durch den folgenden Algorithmus gewährleistet:

<u>Algorithmus 2</u>:

initialisiere R als die Menge aller <u>roten</u> Knoten in V^G
initialisiere $\mathcal{X} := \emptyset$
    % $\mathcal{X}$ ist die bisher gefundene Menge
    % roter Knoten vom Abstand $> 2r$
while $R \neq \emptyset$ do
    wähle ein beliebiges $v \in R$
    $\mathcal{X} := \mathcal{X} \cup \{v\}$
    $R := R \setminus N_{2r}^G(v)$
endwhile
if $|\mathcal{X}| \geq \ell$ then akzeptiere G
else
    $N_{4r}^G(\mathcal{X}) := \bigcup_{x \in \mathcal{X}} N_{4r}^G(x)$
    nutze einen naiven Algorithmus zum Testen, ob es in $N_{4r}^G(\mathcal{X})$ ℓ rote Knoten vom paarweisen Abstand $> 2r$ gibt
endif

Dieser Algorithmus verwendet zunächst eine Greedy-Strategie, um aus den <u>roten</u> Knoten in G eine Menge X von roten Knoten mit paarweisem Abstand $> 2r$ auszuwählen.

Dazu wird in der Schleife in Zeilen 3-7 jeweils ein beliebiger Knoten v aus R ausgewählt, und danach werden alle Knoten mit Abstand $\leq 2r$ von v aus R gelöscht.

Würde auf diese Weise eine Menge X mit mindestens ℓ roten Knoten vom paarweisen Abstand $> 2r$ gefunden, so können wir anhalten und akzeptieren.

Enthält die Menge X jedoch weniger als ℓ Knoten, so können wir daraus noch nicht schließen, dass wir G verwerfen können, denn wir könnten ja in der Schleife die Knoten v für X einfach ungeschickt ausgewählt haben. Was wir jedoch auf jeden Fall wissen ist, dass jeder rote Knoten von G in der $2r$-Nachbarschaft eines Elements aus $\mathcal{X}$ liegt.

Daraus folgt auch, dass die $2r$-Nachbarschaft jedes roten Knotens in der $4r$-Nachbarschaft eines Elements aus $\mathcal{X}$, also in der in Zeile 10 definierten Menge $N_{4r}^{G}(\mathcal{X})$ liegt.

Da $|\mathcal{X}| \leq \ell-1$ ist und da G ein Graph vom Grad $\leq d$ ist, wissen wir, dass

$$|N_{4r}^{G}(\mathcal{X})| \leq (\ell-1) \cdot d^{4r+1}.$$

Daher hängt die Zeit, die für Zeile 11 des Algorithmus benötigt wird, also nicht von der Größe von G ab, sondern nur von einer Zahl $f_d^{(4)}(\ell, r)$ (für eine geeignete Funktion $f_d^{(4)}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Insgesamt löst Algorithmus 2 damit die in Schritt 2 gestellte Aufgabe und benötigt dabei für die Zeilen 1–7 eine Laufzeit $\leq f_d^{(5)}(r) \cdot n$.

Für die Zeilen 8-12 wird eine Laufzeit benötigt, die nur von d, ℓ und r, nicht aber von der Größe von G abhängt.

Insgesamt liefert die Hintereinander-Ausführung der Algorithmen 1 und 2 einen Algorithmus, der bei Eingabe eines basis-lokalen Satzes χ der Größe k und eines Graphen G vom Grad $\le d$ in Zeit $f_d(k) \cdot n$ testet, ob $G \models \chi$ (wobei $n = |V^G| + |E^G|$ und $f_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine geeignete Funktion ist). $\square$

Ein weiteres Beispiel für eine Klasse von Strukturen, auf der das Auswertungsproblem für jeden festen FO-Satz in Linearzeit gelöst werden kann, ist:

Satz 4.20 (Frick, Grohe, 2001)

Es gibt eine berechenbare Funktion f,
so dass das

Auswertungsproblem für FO auf planaren Graphen	
Eingabe:	Ein endlicher planarer Graph G und ein FO[$\{E\}$]-Satz φ
Frage:	Gilt $G \models \varphi$?

in Zeit $f(k) \cdot n$ gelöst werden kann, wobei
k die Länge der Formel φ und n die
Größe (einer geeigneten Kodierung) des Graphen
G ist (etwa: $n = |V^G| + |E^G|$ für $G = (V^G, E^G)$).

Das heißt: Für jeden festen FO[$\{E\}$]-Satz
φ ist das Problem, zu gegebenem planaren
Graphen G zu entscheiden, ob $G \models \varphi$,
in Linearzeit lösbar.

Der Beweis von Satz 4.20 basiert
(a) auf dem Satz von Gaifman und
(b) dem Konzept einer Baumzerlegung
eines Graphen, das in dieser Vorlesung
allerdings nicht genauer betrachtet wird.
Wir werden hier daher keinen Beweis von
Satz 4.20 angeben.

Um die Aussage von Satz 4.19 und Satz 4.20
zu verdeutlichen, betrachten wir kurz ein
konkretes Beispiel.
Für jede feste Zahl $k \in \mathbb{N}$ kann das Problem

> k-Independent-Set
>
> Eingabe: Ein endlicher Graph G
>
> Frage: Gibt es in G eine unabhängige Menge der Größe k, d.h. eine Menge von k Knoten, zwischen denen es keine Kanten gibt?

durch einen Algorithmus gelöst werden, der Zeit $\Theta(n^k)$ benötigt (der Algorithmus testet einfach jede k-elementige Knotenmenge darauf, ob sie unabhängig ist).

Andererseits ist zunächst völlig unklar, ob es einen Algorithmus geben kann, der das Problem in Linearzeit, also in Zeit $O(n)$ löst.

Da das k-Independent-Set-Problem jedoch durch den FO[{E}]-Satz

$$\varphi := \exists x_1 \cdots \exists x_k \bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \left(\neg x_i = x_j \wedge \neg E x_i x_j \wedge \neg E x_j x_i \right)$$

definiert wird (in dem Sinn, dass für jeden Graphen G gilt: $G \models \varphi \iff G$ besitzt eine unabhängige Menge der Größe k), folgt aus Satz 4.19 und Satz 4.20, dass es Algorithmen gibt, die das k-Independent-Set-Problem in Zeit $O(n)$ lösen, wenn man als Eingabe-Graphen ausschließlich planare Graphen oder Graphen von beschränktem Grad zulässt.

4.4 Eine untere Schranke für Formeln in Gaifman-Normalform

Insbesondere angesichts der in Abschnitt 4.3 dargestellten algorithmischen Anwendungen des Satzes von Gaifman ist es natürlich interessant, zu wissen, wie effizient die laut Satz von Gaifman mögliche Umformung einer FO-Formel in eine äquivalente Formel in Gaifman-Normalform durchgeführt werden kann.

Eine Analyse des Algorithmus, der sich aus dem Beweis von Satz 4.11 ergibt, zeigt, dass die Laufzeit dieses Algorithmus verheerend ist: mit jedem Quantor, der in der Formel vorkommt, erhöht sich die Laufzeit um mindestens eine Zweierpotenz.

Definition 4.21

Die Funktion $\text{Turm}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist induktiv definiert durch

$$\text{Turm}(0) := 1 \quad \text{und}$$
$$\text{Turm}(k+1) := 2^{\text{Turm}(k)} \qquad (\text{f.a. } k \in \mathbb{N}).$$

D.h.: $\text{Turm}(k) = \left. 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} k$

Die Tatsache, dass der Algorithmus zur Transformation in GNF, den wir bisher kennengelernt haben, eine verheerende Laufzeit besitzt (nämlich: für eine Formel mit k ineinandergeschachtelten Quantoren ist die Laufzeit größer als $\text{Turm}(k)$), heißt natürlich noch nicht, dass die Transformation prinzipiell nicht effizienter bewerkstelligt werden kann.

Der folgende Satz zeigt allerdings, dass es in der Tat keinen wesentlich effizienteren Algorithmus zur Transformation in GNF geben kann, weil es FO-Sätze gibt, deren kürzeste äquivalente Sätze in GNF extrem lang sind:

<u>Satz 4.22</u> (Dawar, Grohe, Kreutzer, Schweikardt, 2007)

Für jedes $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es einen FO[$\{E\}$]-Satz φ_h der Länge $O(h^4)$, so dass jeder zu φ_h äquivalente FO[$\{E\}$]-Satz in Gaifman-Normalform mindestens die Länge Turm(h) hat.

(hier ohne Beweis)