# Kapitel 3: Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Vereinbarung 3.1:

In diesem Kapitel werden ausschließlich Signaturen betrachtet, die kein(e) Funktionssymbol(e) enthalten. Solche Signaturen nennen wir funktionen-frei.

## 3.1 Das m-Runden EF-Spiel

Sei $\sigma$ eine funktionen-freie Signatur.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei $\sigma$-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\vec{a}' := a_1', \dots, a_k' \in A$ bzw. $\vec{b}' := b_1', \dots, b_k' \in B$ Folgen von Elementen aus $A$ bzw. $B$.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel (kurz: EF-Spiel) auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: S bzw. Sp.) und Duplicator (kurz: D bzw. Dupl.).

Das "Spielbrett" besteht aus den beiden Strukturen $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Eine Partie des Spiels besteht aus $m$ Runden.
In jeder Runde $i \in \{1,\dots,m\}$ geschieht folgendes:
Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element aus $A$, das im Folgenden mit $a_i$ bezeichnet wird, oder er wählt ein Element aus $B$, das im Folgenden mit $b_i$ bezeichnet wird
Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h sie wählt ein $b_i \in B$, falls Spoiler ein $a_i \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_i \in A$, falls Spoiler ein $b_i \in B$ gewählt hat.

Nach der $m$-ten Runde ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Duplicator hat gewonnen, falls die Abbildung

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ll} a_i \longmapsto b_i & \text{für alle } i \in \{1,\dots,m\} \\ c^{\mathfrak{A}} \longmapsto c^{\mathfrak{B}} & \text{für alle Konstantensymbole } c \in \sigma \\ a_j' \longmapsto b_j' & \text{für alle } j \in \{1,\dots,k\} \end{array} \right\}$$

ein <u>partieller Isomorphismus</u> von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ (siehe folgende Definition 3.2) ist.

Falls $\pi$ <u>kein</u> partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist, so hat Spoiler die Partie gewonnen.

<u>Definition 3.2</u> (partieller Isomorphismus)

Sei $\sigma$ eine funktionenfreie Signatur; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\sigma$-Strukturen.

Eine Abbildung

$$\pi : Def(\pi) \to Bild(\pi)$$

mit $Def(\pi) \subseteq A$ und $Bild(\pi) \subseteq B$ heißt <u>partieller Isomorphismus</u> von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, falls gilt:

(1) $\pi$ ist bijektiv,

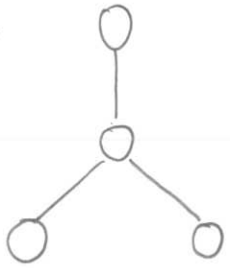
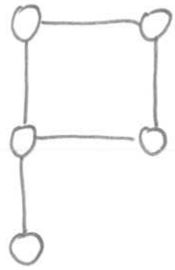
(2) für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}} \in Def(\pi)$ und $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$, und

(3) für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := ar(R)$ und für alle $(a_1, \dots, a_r) \in Def(\pi)^k$ gilt

$$(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

## Beispiele 3.3

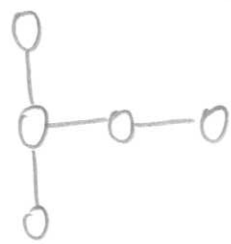
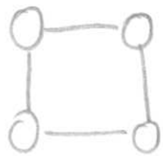
Sei $\sigma := \{E_2\}$, $k := 0$

<u>(a)</u> $\mathfrak{A} :=$  $\mathfrak{B} :=$ 

<u>Spoiler</u> gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, indem er folgendermaßen spielt:

- Runde 1: Wähle denjenigen Knoten $a_1$ in $\mathfrak{A}$, der mit allen anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist

- Runde 2: Wähle einen Knoten $b_2$ in $\mathfrak{B}$, der nicht zum Knoten $b_1$ benachbart ist.

<u>(b)</u> $\mathfrak{A} :=$  $\mathfrak{B} :=$ 

<u>Duplicator</u> gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, denn in beiden Graphen gibt es zu

jedem Knoten sowohl einen Nachbarn als auch einen Nicht-Nachbarn.

(c) Spoiler gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus (b), indem er in den ersten 3 Runden 3 verschiedene nicht benachbarte Knoten in $\mathfrak{A}$ wählt.

Notation 3.4:

Wir schreiben $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ zu bezeichnen.
Ist $k = 0$ (d.h. $\vec{a}'$ und $\vec{b}'$ sind leer), so schreiben wir auch kurz $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Bemerkung 3.5

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:
Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden

Strukturen $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ verschieden sind. Duplicators Ziel ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Eine <u>Strategie</u> für einen der beiden Spieler ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als nächstes machen soll. Formal:

<u>Definition 3.6</u> (Strategie bzw. Gewinnstrategie)

(a) Eine <u>Strategie für Spoiler</u> ist eine Abbildung

$$f_S : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A^i \times B^i) \longrightarrow A \dot\cup B .$$

Sind $\vec{a} := a_1, \dots, a_i$ und $\vec{b} := b_1, \dots, b_i$ die in den ersten $i$ Runden gewählten Elemente in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so gibt $f_S(\vec{a}, \vec{b})$ an, welches Element Spoiler in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll.

(b) Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_D : \bigcup_{i=0}^{m-1} \Big( (A^i \times B^i) \times (A \dot\cup B) \Big) \to A \dot\cup B,$$

so dass für alle $\vec{a} \in A^i$, $\vec{b} \in B^i$, $c \in A \dot\cup B$ gilt:

$$f_D(\vec{a}, \vec{b}, c) \in B \iff c \in A$$

Sind $\vec{a} := a_1, \dots, a_i$ und $\vec{b} := b_1, \dots, b_i$ die in den ersten $i$ Runden gewählten Elemente und ist $c$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt $f_D(\vec{a}, \vec{b}, c)$ an, mit welchem Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde antworten soll.

(c) Eine Gewinnstrategie ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er alle Partien des Spiels $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt.

Notation 3.7

Wir sagen: Spoiler (bzw Duplicator) gewinnt $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$, falls er (bzw sie) eine Gewinnstrategie im $m$-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A}, \vec{a}')$ und $(\mathfrak{B}, \vec{b}')$ hat.

## Satz 3.8

Für alle Funktionen-freien Signaturen $\sigma$, alle $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\vec{a}' := a'_1, \dots, a'_k \in A$, $\vec{b}' := b'_1, \dots, b'_k \in B$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

Genau einer der beiden Spieler (Spoiler bzw. Duplicator) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Beweis: Übung (per Induktion nach $m$) $\square$

## Definition 3.9

Wir schreiben $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$, um auszudrücken, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im $m$-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat.

## Beispiel 3.10

Sei $\sigma_{ord} := \{\leq, \min, \max\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol $\leq$ und zwei Konstantensymbolen min und max besteht.

Wir betrachten die beiden folgenden $\sigma_{ord}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$\mathfrak{A} := (\{1, 2, \dots, 8\}, \leq^{\mathfrak{A}}, 1, 8)$ und

$\mathfrak{B} := (\{1, 2, \dots, 8, 9\}, \leq^{\mathfrak{B}}, 1, 9)$, wobei $\leq^{\mathfrak{A}}$ und $\leq^{\mathfrak{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf $A$ und $B$ sind

Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$\mathfrak{A} \approx_2 \mathfrak{B}$ (d.h. Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$),

und $\mathfrak{A} \not\approx_3 \mathfrak{B}$ (d.h. Spoiler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_3(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$).

Dies lässt sich verallgemeinern zu folgender Aussage:

Satz 3.11

Sei $\sigma_{Ord} := \{\leq, min, max\}$ die Signatur aus Bsp. 3.10.
Für jedes $m \geq 1$ und für alle geordneten endlichen Strukturen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}}, min^{\mathfrak{A}}, max^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \leq^{\mathfrak{B}}, min^{\mathfrak{B}}, max^{\mathfrak{B}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B} \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| > 2^m$$

(Notation: Eine $\sigma_{Ord}$-Struktur $\mathfrak{C} = (C, \leq^{\mathfrak{C}}, min^{\mathfrak{C}}, max^{\mathfrak{C}})$ heißt geordnet, falls $\leq^{\mathfrak{C}}$ eine lineare Ordnung auf $C$ ist (d.h. $\leq^{\mathfrak{C}}$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch) und $min^{\mathfrak{C}}$ bzw. $max^{\mathfrak{C}}$ ist das kleinste bzw. größte Element in $C$ bzgl. $\leq^{\mathfrak{C}}$.)

Beweis:

"$\Leftarrow$": Falls $|A| = |B|$, so gilt: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$
(beachte: laut Voraussetzung sind A und B endlich).
Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Duplicator gewinnt das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem sie in jeder Runde einfach Spoilers Zug "kopiert", d.h. sie wählt $\pi(a_i)$ (bzw $\pi^{-1}(b_i)$), falls Spoiler in der $i$-ten Runde ein Element $a_i \in A$ (bzw $b_i \in B$) wählt.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $|A| > 2^m$ und $|B| > 2^m$.

Für $\mathcal{C} := \mathfrak{A}$ oder $\mathcal{C} := \mathfrak{B}$ betrachte folgende auf $C \times C$ definierte Distanzfunktion

$$\mathrm{Dist}(c, c') := \left| \{ d \in C : c <^{\mathcal{C}} d \leq^{\mathcal{C}} c' \text{ oder } c' <^{\mathcal{C}} d \leq^{\mathcal{C}} c \} \right|.$$

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_1, \dots, a_i$ und $b_1, \dots, b_i$ die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B, und ist $a_{min} := \min^{\mathfrak{A}}$, $a_{max} := \max^{\mathfrak{A}}$, $b_{min} := \min^{\mathfrak{B}}$, $b_{max} := \max^{\mathfrak{B}}$, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \dots, i, min, max\}$:

(a) $a_j \leq^{\mathfrak{A}} a_{j'} \iff b_j \leq^{\mathfrak{B}} b_{j'}$ und

(b) $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}) = \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'})$ oder $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}), \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$

Der Beweis folgt per Induktion nach $i$:

<u>$i=0$:</u> Die Bedingung $(*)_0$ ist erfüllt, da

$\mathrm{Dist}(a_{min}, a_{max}) = |A|-1 \geq 2^m$ und

$\mathrm{Dist}(b_{min}, b_{max}) = |B|-1 \geq 2^m$.

<u>$i \to i+1$:</u> Gemäß Induktionsannahme sind bereits $i$ Runden gespielt und die Bedingung $(*)_i$ ist nach der $i$-ten Runde erfüllt.

Fall 1: Spoiler wählt in der $(i+1)$-ten Runde ein Element $a_{i+1}$ in $A$.

- Falls $a_{i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1,\dots,i\} \cup \{min, max\}$, so antwortet Duplicator mit $b_{i+1} := b_j$ und bewirkt damit, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ gilt.

- Ansonsten gibt es Indices $j, j' \in \{1,\dots,i, min, max\}$, so dass
  - $a_j <^{\mathfrak{A}} a_{i+1} <^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und
  - f.a. $j'' \in \{1,\dots,i, min, max\}$ gilt $a_{j''} \leq^{\mathfrak{A}} a_j$ oder $a_{j'} \leq^{\mathfrak{A}} a_{j''}$.

Da $(*)_i$ gemäß Ind.annahme erfüllt ist, gilt:

(1.) $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}) = \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'})$ oder

(2.) $\mathrm{Dist}(a_j, a_{j'}), \mathrm{Dist}(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$.

In Fall (1.) gibt es ein Element $b_{i+1}$ in $\mathcal{B}$ so dass $b_j <^{\mathcal{B}} b_{i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und $Dist(b_j, b_{i+1}) = Dist(a_j, a_{i+1})$ und $Dist(b_{i+1}, b_{j'}) = Dist(a_{i+1}, a_{j'})$.
Offensichtlich ist die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt, wenn Dupl. in der $(i+1)$-ten Runde dieses $b_{i+1}$ wählt.

In Fall (2.) muss es mindestens ein Element $c \in B$ geben, so dass $b_j <^{\mathcal{B}} c <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
$Dist(b_j, c) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$ und $Dist(c, b_{j'}) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$.

- Falls $Dist(a_j, a_{i+1}) \geq 2^{m-(i+1)}$ und $Dist(a_{i+1}, a_{j'}) \geq 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. in der $(i+1)$-ten Runde $b_{i+1} := c$
- Falls $Dist(a_j, a_{i+1}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. das $b_{i+1} >^{\mathcal{B}} b_j$ mit $Dist(b_j, b_{i+1}) = Dist(a_j, a_{i+1})$.
- Falls $Dist(a_{i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Dupl. das $b_{i+1} <^{\mathcal{B}} b_{j'}$ mit $Dist(b_{i+1}, b_{j'}) = Dist(a_{i+1}, a_{j'})$.

Man kann leicht nachprüfen, dass in jedem der 3 Fälle die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Fall 2: Spoiler wählt in der $(i+1)$-ten Runde ein Element $b_{i+1}$ in $\mathcal{B}$

Duplicators Antwort $a_{i+1}$ in $\mathcal{A}$ wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt.
Wir haben also bewiesen, dass Dupl. so spielen kann, dass nach jeder Runde $i \in \{0, \dots, m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.
Insbes. ist nach $m$ Runden die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Dupl. hat daher die Partie gewonnen.

"$\Longrightarrow$": Offensichtlich genügt es, folgendes zu zeigen:
Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leq 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist:

$(**)_i$: Sind $a_1, \dots, a_i$ und $b_1, \dots, b_i$ die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in $A$ und $B$, und ist $a_{min} := \min^{\mathfrak{A}}$, $a_{max} := \max^{\mathfrak{A}}$, $b_{min} := \min^{\mathfrak{B}}$, $b_{max} := \max^{\mathfrak{B}}$, so gibt es $j, j' \in \{1, \dots, i, min, max\}$, so dass

(a) $(a_j <^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und $b_j \geq^{\mathfrak{B}} b_{j'})$ oder $(a_j \geq^{\mathfrak{A}} a_{j'}$ und $b_j <^{\mathfrak{B}} b_{j'})$

oder

(b) $Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $Dist(a_j, a_{j'}) < Dist(b_j, b_{j'})$.

Details: Übung.

$\square$

## 3.2 Der Satz von Ehrenfeucht

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht.

Insbesondere werden wir sehen, dass man EF-Spiele nutzen kann, um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen nicht durch Formeln der Logik erster Stufe ausgedrückt werden können.

Um den Zusammenhang zwischen FO und EF-Spielen beschreiben zu können, benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 3.12 (Quantorentiefe bzw. Quantorenrang)

Der Quantorenrang (bzw. Quantorentiefe) $qr(\varphi)$ einer $FO[\sigma]$-Formel $\varphi$ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in $\varphi$ vorkommen. Per Induktion über den Formelaufbau ist $qr(\varphi)$ also wie folgt definiert:

- $qr(\varphi) = 0$ falls $\varphi$ eine atomare Formel ist
- $qr(\varphi) = qr(\psi)$, falls $\varphi$ von der Form $\neg\psi$ ist
- $qr(\varphi) = \max\{qr(\psi_1), qr(\psi_2)\}$, falls $\varphi$ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ ist (mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)
- $qr(\varphi) = qr(\psi)+1$, falls $\varphi$ von der Form $Qx\psi$ ist mit $Q \in \{\exists, \forall\}$.

## Beispiele 3.13

- $qr\big(\exists x \forall y\, (x=y \lor Rxyz)\big) = 2$
- $qr\big(\exists x (Px \lor \forall y\, Rxyz)\big) = 2$
- $qr\big((\exists x\, Px \lor \forall y\, (Ryyz \to y=z))\big) = 1$

## Definition 3.14

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\sigma$-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen <u>m-äquivalent</u> (kurz: $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), falls sie die gleichen $FO[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ erfüllen, d.h. falls folgendes gilt:

f.a. $FO[\sigma]$-Sätze $\varphi$ mit $qr(\varphi) \leq m$ ist

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

## Satz 3.15 (Der Satz von Ehrenfeucht, 1961)

Sei $\sigma$ eine endliche Funktionen-freie Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei $\sigma$-Strukturen. Dann gilt f.a. $m \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$$

d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen dieselben $FO[\sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$

d.h. Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Bevor wir den Satz von Ehrenfeucht beweisen, wollen wir uns zunächst anschauen, wie man den Satz benutzen kann, um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen nicht in der Logik erster Stufe formalisiert werden können:

<u>Definition 3.16</u>

Sei $S$ eine Klasse von Strukturen, sei $\sigma$ eine funktionen-freie Signatur und sei $C \subseteq S$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen.

$C$ heißt <u>FO-definierbar in $S$</u>, falls es einen $FO[\sigma]$-Satz $\varphi$ gibt, so dass f.a. $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A} \in S$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{A} \in C$.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht erhält man folgendes:

<u>Korollar 3.17</u>

Sei $S$ eine Klasse von Strukturen, sei $\sigma$ eine endliche funktionen-freie Signatur und sei $C \subseteq S$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen.

Falls es für jedes $m \in \mathbb{N}$ $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$ gibt, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$ (d.h. Dupl. hat eine Gewinnstrategie im $m$-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m$), so ist $C$ <u>nicht</u> FO-definierbar in $S$.

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen, $C$ ist doch FO-definierbar in $S$.

Dann gibt es einen FO[$\sigma$]-Satz $\varphi$ s.d. f.a. $\sigma$-Strukturen $\mathcal{C} \in S$ gilt: $\mathcal{C} \in C \Leftrightarrow \mathcal{C} \models \varphi$.

Sei $m := qr(\varphi)$.

Laut Voraussetzung gibt es $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Gemäß des Satzes von Ehrenfeucht gilt dann: $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$, d.h. $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ erfüllen die gleichen FO[$\sigma$]-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$.

Insbes. gilt also: $\mathfrak{A}_m \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B}_m \models \varphi$.

Daher: $\mathfrak{A}_m \in C \Leftrightarrow \mathfrak{B}_m \in C$. $\lightning$ Wid. zu $\mathfrak{A}_m \in C$ und $\mathfrak{B}_m \in S \setminus C$.

$\square$

Als einfache Anwendung von Korollar 3.17 und Satz 3.11 erhalten wir:

Satz 3.18:
Sei $\mathrm{Ord}_{\leq}$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$, und sei $\mathrm{Even}_{\leq}$ die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Kardinalität, d.h. aller endl. linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$, bei denen $|A|$ durch 2 teilbar ist.

Dann gilt:

$Even_{\leq}$ ist nicht FO-definierbar in $Ord_{\leq}$.

Beweis:

Nütze Korollar 3.17 (mit $S := Ord_{\leq}$ und $C := Even_{\leq}$).

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_m := (A, \leq^{\mathfrak{A}_m})$ eine lineare Ordnung mit $|A| = 2^m + 2$ und sei $\mathfrak{B}_m := (B, \leq^{B})$ eine lineare Ordnung mit $|B| = 2^m + 1$.

Somit ist $\mathfrak{A}_m \in Even_{\leq}$ und $\mathfrak{B}_m \in Ord_{\leq} \setminus Even_{\leq}$.

Aus Satz 3.11 folgt, dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Korollar 3.17 liefert daher, dass $Even_{\leq}$ nicht FO-definierbar ist in $Ord_{\leq}$ □

## Beweis des Satzes von Ehrenfeucht:

Wir nützen folgende Notation:

Definition 3.19

$\sigma$ sei eine endliche Funktionen-freie Signatur, $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Struktur, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = a_1, \dots, a_k$ eine Folge von Elementen aus $A$ und $\vec{x} = x_1, \dots, x_k$ eine Folge von $k$ verschiedenen Elementen aus Var.

Wir definieren induktiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine

$FO[\sigma]$- Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x})$ der Quantorentiefe $m$

wie folgt:

$$\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x}) := \bigwedge \left\{ \psi(\vec{x}) : \begin{array}{l} \psi \text{ ist eine atomare} \\ \text{oder eine negierte} \\ \text{atomare } FO[\sigma]\text{-Formel} \\ \text{mit } frei(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\} \\ \text{und } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \end{array} \right\}$$

(wir nutzen hier folgende Notation: Für eine endliche Menge $M$ von Formeln schreiben wir $\bigwedge M$, um die Formel $\bigwedge_{\psi \in M} \psi$, d.h. die Konjunktion über alle Formeln aus $M$, zu bezeichnen).

Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x}) := \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}' a_{k+1}}(\vec{x}, x_{k+1}) \;\wedge$$
$$\forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}', a_{k+1}}(\vec{x}, x_{k+1}) .$$

Die Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}'}(\vec{x})$ heißt <u>$m$-Isomorphietyp</u> (oder $m$-Hintikka-Formel) von $\vec{a}'$ in $\mathfrak{A}$.

**Bemerkung 3.20**

(a) In Def. 3.19 ist $k=0$ erlaubt.
Der $m$-Isomorphietyp ist dann ein Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$.

(b) Für alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k := \{ \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}(\vec{x}) : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \vec{a}' \in A^k \}$$

endlich
(Für $m=0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln über den Variablen $x_1, \dots, x_k$ gibt.
Für $m>0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.)

(c) $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{a}']$
(Dies folgt leicht per Induktion nach $m$).

Wir beweisen nun folgende, stärkere Version des Satzes von Ehrenfeucht. (Man sieht leicht, dass Satz 3.15 unmittelbar aus dem folgenden Satz folgt).

**Satz 3.21** (Ehrenfeucht, 1961)

Sei $\sigma$ eine endliche Funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei $\sigma$-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{a}' = a'_1, \ldots, a'_k \in A$ und $\vec{b}' = b'_1, \ldots, b'_k \in B$.

Dann sind äquivalent:

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

(b) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$

(c) F.a. $FO[\sigma]$-Formeln $\psi$ mit $frei(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $qr(\psi) \leq m$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}'].$$

**Beweis:**

"(c) $\Rightarrow$ (b)": Es gilt $qr(\varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}) = m$ und $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{a}']$. Aus (c) folgt daher: $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$.

"(a) $\iff$ (b)": Per Induktion nach $m$.

$m = 0$: Dupl. gewinnt $\mathfrak{G}_0(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

$\overset{\text{Gewinnbedingung}}{\iff}$ die Abbildung $\pi$ mit $\pi(a'_i) := b'_i$ (f.a. $i = 1, \ldots, k$) und $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ (f.a. $c \in \sigma$) ist ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

$\overset{\text{Def. von } \varphi^0_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}}{\iff}$ $\mathfrak{B} \models \varphi^0_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$

$m \mapsto m+1$ :

Dupl. gewinnt $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

$\Longleftrightarrow$ f.a. $a \in A$ ex. $b \in B$ s.d. Dupl. $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}'a, \mathfrak{B}, \vec{b}'b)$ gewinnt
und
f.a. $b \in B$ ex $a \in A$ s.d. Dupl. $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}'a, \mathfrak{B}, \vec{b}'b)$ gewinnt

$\underset{\text{Ind.ann.}}{\Longleftrightarrow}$ f.a. $a \in A$ ex $b \in B$ s.d. $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}[\vec{b}', b]$
und
f.a. $b \in B$ ex $a \in A$ s.d. $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}[\vec{b}', b]$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \Big( \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}(\vec{x}, x_{k+1}) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^m_{\mathfrak{A}, \vec{a}'a}(\vec{x}, x_{k+1}) \Big) [\vec{b}']$$

$\underset{\text{Def. } \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}}{\Longleftrightarrow} \quad \mathfrak{B} \models \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A}, \vec{a}'}[\vec{b}']$

$\Box$ (a) $\Leftrightarrow$ (b)

"(a) $\Rightarrow$ (c)": Per Induktion nach $m$.

$m=0$: Wie bei "(b) $\Rightarrow$ (a)".

$m \mapsto m+1$: Gemäß Voraussetzung gewinnt Dupl. $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$.

Sei $\psi(\vec{x})$ eine $FO[\sigma]$-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $qr(\psi) \leq m+1$.

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}'] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}']$ $\quad (*)$

<u>klar:</u> Die Menge aller Formeln $\psi$, die die Bedingung (*) erfüllen, ist abgeschlossen unter Booleschen Kombinationen (d.h. $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) und enthält gemäß Induktionsannahme alle Formeln der Quantorentiefe $\leq m$.

Wir müssen daher OBdA nur noch den Fall betrachten, dass $\psi$ von der Form $\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})$ ist, wobei $qr(\chi) = m$.

<u>zu zeigen:</u> $\mathfrak{A} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{a}']$

$\iff \mathfrak{B} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{b}']$

<u>zu "$\Rightarrow$":</u> Wegen $\mathfrak{A} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{a}']$ gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}', a]$.

Da Dupl. $G_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt, muss es ein $b \in B$ geben, so dass Dupl. das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', a, \mathfrak{B}, \vec{b}', b)$ gewinnt.

Gemäß Induktionsannahme gilt dann:

$$\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}', a] \iff \mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}', b].$$

Somit gilt $\mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}', b]$ und daher $\mathfrak{B} \models \left(\exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})\right)[\vec{b}']$

<u>zu "$\Leftarrow$":</u> analog.

$\square_{(a) \Rightarrow (c)}$

$\square_{\text{Satz } 3.21}$

## Bemerkung 3.22 (Gewinnstrategie für Spoiler)

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ $\sigma$-Strukturen.

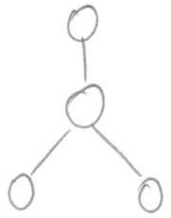
Sei $\varphi$ ein $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz s.d. $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

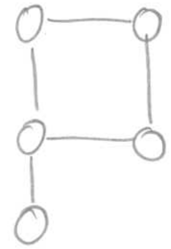
Sei $m := \mathrm{qr}(\varphi)$.

Gemäß Satz 3.21 und Satz 3.8 hat dann Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Der Satz $\varphi$ gibt sogar direkt eine Gewinnstrategie für Spoiler an: Er gewinnt, indem er Elemente in $\mathfrak{A}$ wählt, die den $\exists$-Quantoren in $\varphi$ entsprechen, und Elemente in $\mathfrak{B}$, die den $\forall$-Quantoren in $\varphi$ entsprechen.

Bsp: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Graphen

$\mathfrak{A}$: 

$\mathfrak{B}$: 

So ist $\varphi := \exists x \forall y \, (x = y \lor Exy)$

ein Satz mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, d.h. es gilt

$$\mathfrak{A} \models \exists x \forall y \, (x=y \lor Exy), \quad \mathfrak{B} \models \forall x \exists y \, (\neg x = y \land \neg Exy).$$

Sp. wählt in Runde 1 ein $a_1 \in A$ s.d.

$$\mathfrak{A} \models \Big(\forall y\, (x=y \vee Exy)\Big)[a_1]$$

(ein solches Element gibt es, da $\mathfrak{A} \models \varphi$).

Wegen $\mathfrak{B} \not\models \varphi$ muss für <u>jede</u> Antwort $b_1 \in B$ von Dupl. gelten:

$$\mathfrak{B} \models \Big(\exists y\, (\neg x=y \wedge \neg Exy)\Big)[b_1]$$

In Runde 2 kann Sp. daher ein Element $b_2 \in B$ auswählen, für das gilt:

$$\mathfrak{B} \models \Big(\neg x=y \wedge \neg Exy\Big)[b_1, b_2].$$

Für jede mögliche Antwort $a_2 \in A$, die Dupl. geben kann, gilt $\mathfrak{A} \models \Big(x=y \vee Exy\Big)[a_1, a_2]$.

Daher kann die Abbildung $\pi$ mit $\pi(a_1) = b_1$ und $\pi(a_2) = b_2$ kein partieller Isomorphismus sein. Dupl. hat die Partie also verloren.

<u>Bemerkung 3.23</u>: ("$\equiv_m$ hat nur endlich viele Äquivalenzklassen")

Aus Satz 3.21 und Bemerkung 3.20 (b) folgt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede funktionen-freie Signatur $\sigma$ die Relation $\equiv_m$ nur <u>endlich</u> viele Äquivalentklassen auf der Klasse aller $\sigma$-Strukturen hat.

Die Äquivalenzklasse, zu der eine Struktur $\mathfrak{A}$ gehört, wird durch den FO[$\sigma$]-Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$ definiert

Die Klasse aller $\sigma$-Strukturen ist also eine Vereinigung von endlich vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_m$.

Für jeden FO[$\sigma$]-Satz $\varphi$ ist

$$\{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$.

Insbes. folgt daraus, dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur endlich viele nicht-äquivalente FO[$\sigma$]-Formeln der Quantorentiefe $\leq m$ gibt.

Aus Satz 3.21 können wir folgende Verschärfung von Korollar 3.17 folgern:

Korollar 3.24

Ist $S$ eine Klasse von Strukturen, $\sigma$ eine (endliche) Funktionen-freie Signatur und $C \subseteq S$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathcal{C}$ ist nicht FO-definierbar in $\mathcal{S}$

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{B}_m \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}$, so dass $\mathfrak{A}_m \approx_m \mathfrak{B}_m$.

Beweis:

(b) $\Rightarrow$ (a): wurde in Korollar 3.17 bewiesen.

(a) $\Rightarrow$ (b): Angenommen, (b) gilt nicht.

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass für alle $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{S}$ gilt:

(*) Falls $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ und $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$.

Gemäß dem Satz von Ehrenfeucht gilt

$$\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}.$$

Die Aussage (*) besagt also, dass $\mathcal{C}$ eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$ ist und durch den FO[$\sigma$]-Satz

$$\psi := \bigvee \{ \varphi^m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \in \mathcal{C} \}$$

definiert wird.

D.h. f.a. $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{C} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\mathfrak{C} \in \mathcal{C} \iff \mathfrak{C} \models \psi.$$

Somit ist $\mathcal{C}$ FO-definierbar in $\mathcal{S}$. $\lightning$ $\square$

## 3.3 Logische Reduktionen

**Satz 3.25** („Graphzusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar")

(a) Sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen, d.h. aller Strukturen $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}})$ mit $|V| < \infty$ für die gilt: f.a. $v \in V$ ist $(v,v) \notin E^{\mathcal{G}}$, und f.a. $v, w \in V$ ist $(v,w) \in E^{\mathcal{G}} \iff (w,v) \in E^{\mathcal{G}}$.

Sei Conn die Klasse aller endlichen ungerichteten zusammenhängenden Graphen.

Es gilt: Conn ist nicht FO-definierbar in UGraphs.

(b) Sei RGraphs die Klasse aller endlichen Graphen $\mathcal{G} = (V, E^{\mathcal{G}}, s^{\mathcal{G}}, t^{\mathcal{G}})$ mit $s^{\mathcal{G}}, t^{\mathcal{G}} \in V$.

Sei Reach die Klasse aller $\mathcal{G} \in$ RGraphs, in denen es einen Pfad vom Knoten $s^{\mathcal{G}}$ zum Knoten $t^{\mathcal{G}}$ gibt.

Es gilt: Reach ist nicht FO-definierbar in RGraphs.

Beweis:

(a) Durch Widerspruch.

Angenommen, $\varphi$ ist ein FO[$\{E\}$]-Satz, so dass für jeden ungerichteten endlichen Graphen $G = (V, E^G)$ gilt: $G \models \varphi \iff G$ ist zusammenhängend.

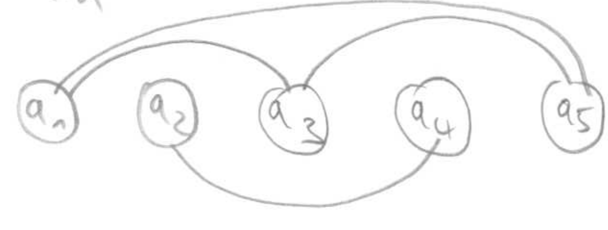
<u>Idee:</u> Nutze diesen Satz $\varphi$, um einen $FO[\{\leq\}]$-Satz $\psi$ zu konstruieren, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff |A| \text{ ist gerade}$$

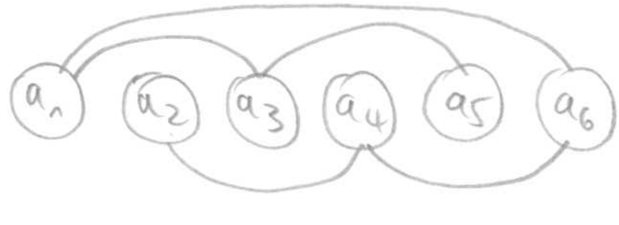
Von Satz 3.18 wissen wir bereits, dass es einen solchen Satz $\psi$ nicht geben kann.

Um den Satz $\psi$ zu konstruieren, ordnen wir jeder endlichen linearen Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leq^{\mathfrak{A}})$ mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $a_1 <^{\mathfrak{A}} a_2 <^{\mathfrak{A}} \dots <^{\mathfrak{A}} a_n$ (für $n := |A|$) den Graphen $G_{\mathfrak{A}}$ mit Knotenmenge $A$ zu, dessen Kantenmenge aus genau den Kanten zwischen $a_i$ und $a_{i+2}$, f.a. $i \leq n-2$, und einer zusätzlichen Kante zwischen $a_1$ und $a_n$ besteht.

<u>Skizze:</u> $|A| = 5 \Rightarrow G_{\mathfrak{A}}$:




$|A| = 6 \Rightarrow G_{\mathfrak{A}}$:



Man sieht leicht, dass folgendes gilt:

$G_{\mathfrak{A}}$ ist zusammenhängend $\iff$ $|A|$ ist gerade (*)

Sei nun $\chi_E(x,y)$ eine FO[{≤}]-Formel, die besagt

- "$y = x+2$" oder "$x = y+2$" oder
- ("$x = \min$" und "$y = \max$") oder
- ("$y = \min$" und "$x = \max$")

(klar: eine solche FO[≤]-Formel $\chi_E(x,y)$ lässt sich leicht konstruieren).

Ausgewertet in einer linearen Ordnung $\mathfrak{A}$ "simuliert" die Formel $\chi_E(x,y)$ gewissermaßen die Kantenrelation des Graphen $G_{\mathfrak{A}}$.

Sei nun $\psi$ der FO[{≤}]-Satz, der aus dem FO[{E}]-Satz $\varphi$ entsteht, indem jedes Atom der Form $E(z_1,z_2)$ durch die FO[{≤}]-Formel $\chi_E(z_1,z_2)$ ersetzt wird.

Der Satz $\psi$ ist also gerade so konstruiert, dass beim Auswerten von $\psi$ in $\mathfrak{A}$ die Auswertung von $\varphi$ im Graphen $G_{\mathfrak{A}}$ simuliert wird.

Es gilt also:

$$\mathfrak{A} \models \psi \iff G_{\mathfrak{A}} \models \varphi$$

$$\underset{\text{Wahl von } \varphi}{\iff} G_{\mathfrak{A}} \text{ ist zusammenhängend}$$

$$\underset{(*)}{\iff} |A| \text{ ist gerade.}$$

Somit ist $\text{Even}_{\leq}$ FO-definierbar in $\text{Ord}_{\leq}$.

↯ Widerspruch zu Satz 3.18

□ (a)

(b) Übung. □

Bemerkung 3.26 (Logische Reduktionen)

Die im Beweis von Satz 3.25 benützte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Satz 3.25 wurde das Problem, einen FO-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine lineare Ordnung gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage "eine lineare Ordnung hat gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen "simuliert" (bzw. "interpretiert"), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen (bzw. "logischen Interpretationen") oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

## 3.4 Der Satz von Hanf

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium für die m-Äquivalenz zweier Strukturen, so dass man durch eine einfache Anwendung dieses Satzes leicht zeigen kann, dass $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, ohne dabei explizit eine Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel konstruieren zu müssen.

Bevor wir die exakte Formulierung des Satzes von Hanf angeben können, benötigen wir noch ein paar Notationen.

<u>Definition 3.27</u> (Gaifman-Graph, Distanzfunktion, Nachbarschaft)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Struktur.

<u>(a)</u> Der <u>Gaifman-Graph</u> $G(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ ist der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V^{G(\mathfrak{A})} := A$ und Kantenmenge $E^{G(\mathfrak{A})} := \left\{ (u,v) \, : \, \begin{array}{l} u \neq v \text{ und es gibt ein } R \in \sigma \\ \text{und ein Tupel } (a_1,\dots,a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \\ \text{s.d. } u,v \in \{a_1,\dots,a_r\} \end{array} \right\}$

(b) Die <u>Distanzfunktion</u> $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}} : A \times A \to \mathbb{N}$

ist definiert durch

$$\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u = v \\ \infty & \text{falls } u \neq v \text{ und es in } G(\mathfrak{A}) \\ & \text{keinen Pfad von } u \text{ nach } v \text{ gibt} \\ \min\left\{ l \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G(\mathfrak{A}) \text{ einen} \\ \text{Pfad der Länge } l \text{ von} \\ u \text{ nach } v \end{array} \right\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $u \in A$ und $U \subseteq A$, so setzen wir

$$\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u, U) := \min\left\{ \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(u,v) : v \in U \right\}$$

(c) Für ein $a \in A$ und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ ist die <u>$r$-Umgebung</u> (oder: <u>$r$-Nachbarschaft</u>) von $a$ die Menge

$$N_r^{\mathfrak{A}}(a) := \left\{ a' \in A : \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a, a') \leq r \right\}$$

<u>Skizze:</u>


Ist $U \subseteq A$, so setzen wir

$$N_r^{\mathfrak{A}}(U) := \left\{ a' \in A : \mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a', U) \leq r \right\} = \bigcup_{u \in U} N_r^{\mathfrak{A}}(u)$$

Ist $U = \{a_1, \ldots, a_k\}$, so schreiben wir auch

$N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ an Stelle von $N_r^{\mathfrak{A}}(U)$.

(d) Ist $U \subseteq A$, so schreiben wir $\mathfrak{A}|_U$ für die durch die Menge $U$ induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$, wobei in $\sigma$ vorkommende Konstantensymbole ignoriert werden. D.h.:

$$\mathfrak{A}|_U := \left( U, \; \left(R^{\mathfrak{A}} \cap U^{ar(R)}\right)_{R \in \sigma} \right).$$

Insbes. ist $\mathfrak{A}|_U$ eine Struktur über der Signatur $\sigma \setminus \{c : c \text{ ist Konstantensymbol in } \sigma\}$.

(e) Ist $U \subseteq A$ und sind $a_1, \dots, a_i \in U$, so schreiben wir $(\mathfrak{A}|_U, a_1, \dots, a_i)$ für die Struktur

$$\left( U, \; \left(R^{\mathfrak{A}} \cap U^{ar(R)}\right)_{R \in \sigma}, \; a_1, \dots, a_i \right)$$

Insbes ist $(\mathfrak{A}|_U, a_1, \dots a_i)$ eine Struktur über einer Signatur, die aus den Relationssymbolen von $\sigma$ und $i$ zusätzlichen Konstantensymbolen besteht.

(f) Sind $a_1, \dots, a_i \in A$ so schreiben wir $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_i)$ an Stelle von $(\mathfrak{A}|_{N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_i)}, a_1, \dots, a_i)$.

Definition 3.28 (r-Umgebungstypen)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur, $\mathfrak{A}$ eine $\sigma$-Struktur, $a \in A$, $r \in \mathbb{N}$.

(a) Der r-Umgebungstyp von $a$ in $\mathfrak{A}$ die Struktur

$$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a) \overset{\text{Def}}{=} \left( \mathfrak{A}|_{N_r^{\mathfrak{A}}(a)}, a \right)$$

(b) Ist $\rho$ ein r-Umgebungstyp, so bezeichnet

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) := \left| \{ a' \in A : \mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho \} \right|$$

die Anzahl der Elemente in $A$, deren r-Umgebungstyp isomorph zu $\rho$ ist.

Satz 3.28 (Satz von Hanf, 1965)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\sigma$-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$. Falls gilt:

(1) es gibt eine Zahl $e \geq 1$, so dass jede $3^m$-Umgebung eines Elements in $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ höchstens $e$ Elemente besitzt, und

(2) für jeden $3^m$-Umgebungstyp $\rho$ ist

$$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \#_\rho(\mathfrak{A}), \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (m+k) \cdot e,$$

wobei $k$ die Anzahl der Konstantensymbole in $\sigma$ ist, und

(3) $\sigma$ enthält kein(e) Konstantensymbol(e) oder

für $\vec{c}^{\mathfrak{A}} := (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma}$ und $\vec{c}^{\mathfrak{B}} := (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}$ gilt:

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_{3^m}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}) \cong \mathcal{N}^{\mathfrak{B}}_{3^m}(\vec{c}^{\mathfrak{B}})$$

dann ist $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$.

(Beachte: Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind, so kann man Bedingung (1) z.B. dadurch erfüllen, dass man $e := \max\{|A|, |B|\}$ wählt).

Beweis:

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, m$ gegeben, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.
Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ ist, zeigen wir, dass Duplicator im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a_1, \ldots, a_i$ bzw. $b_1, \ldots, b_i$ die in den ersten $i$ Runden gewählten Elemente in $A$ und $B$, so gilt:

$$\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_{r_i}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i) \cong \mathcal{N}^{\mathfrak{B}}_{r_i}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \ldots, b_i)$$

Für $i \in \{0,1,\dots,m\}$ sind die Zahlen $r_i \in \mathbb{N}$ dabei so gewählt, dass gilt: $r_m = 0$ und für alle $i<m$ ist $r_i = 3r_{i+1}+1$

(Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $r_i = \frac{3^{m-i}-1}{2}$.

Insbes ist $r_0 = \frac{3^m-1}{2} \leq 3^m$ ).

Per Induktion nach $i$ zeigen wir, dass Dupl. so spielen kann, dass nach Runde $i$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.

<u>$i=0$:</u> Falls $\sigma$ kein(e) Konstantensymbol(e) enthält, so sagt $(*)_0$ nichts aus.

Falls $\sigma$ Konstantensymbole enthält, so ist $(*)_0$ gemäß Voraussetzung (3) erfüllt (beachte, dass $r_0 \leq 3^m$).

<u>$i \to i+1$:</u> Gemäß Induktionsannahme ist $(*)_i$ nach Runde $i$ erfüllt.

Wir müssen zeigen, dass Duplicator in Runde $i+1$ so spielen kann, dass $(*)_{i+1}$ nach Runde $i+1$ erfüllt ist.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass Spoiler in Runde $i+1$ ein Element $a_{i+1}$ in $A$ wählt.

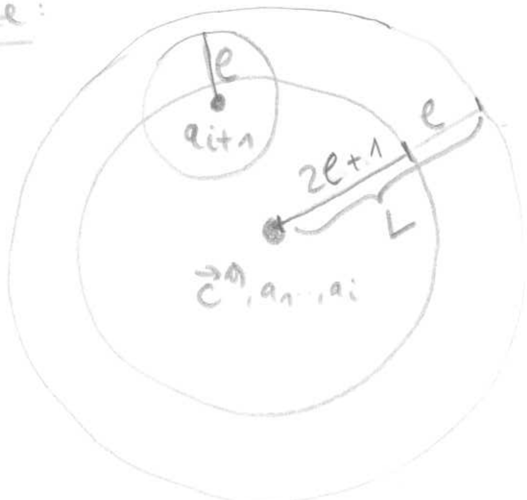
(Der Fall, dass Sp. ein $b_{i+1}$ in $B$ wählt, kann analog, durch Vertauschen der Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ behandelt werden)

Sei $\ell := r_{i+1}$ und $L := r_i$. Gemäß der Wahl der $r_i$ gilt: $L = 3\ell + 1$. Gemäß $(*)_i$ gibt es einen Isomorphismus $\boxed{\pi : \mathcal{N}_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i) \cong \mathcal{N}_L^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i)}$ ⊛

Sei $a_{i+1} \in A$ das von Sp. in Runde $i+1$ gewählte Element.

Fall 1: $a_{i+1} \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i)$

Skizze:




Es gilt: $N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 \dots a_i)$, und

daher $N_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i, a_{i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(\vec{c}, a_1, \dots, a_i)$

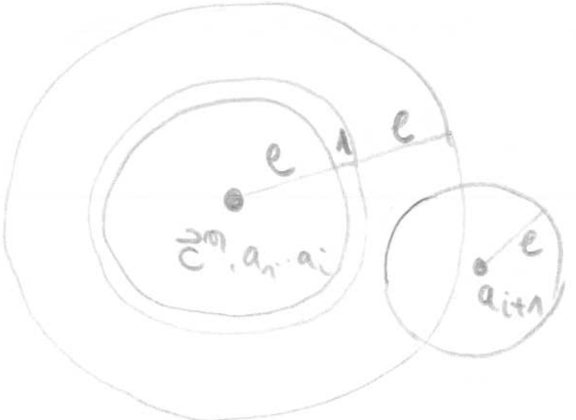
Für $b_{i+1} := \pi(a_{i+1})$ folgt daher aus ⊛, dass

$$\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i, a_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i, b_{i+1}),$$

und somit ist $⊛_{i+1}$ erfüllt, wenn Dupl. in Runde $i+1$ das Element $b_{i+1}$ wählt.

**Fall 2:** $a_{i+1} \notin N^{\mathfrak{A}}_{2\ell+1}(\vec{c}, a_1, \dots, a_i)$

Skizze:




Es gilt: $\mathrm{Dist}^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}, \{\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i\}) > 2\ell+1$, d.h.

$N_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i) \cap N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) = \emptyset$ und

kein Tupel einer Relation in $\mathfrak{A}$ enthält sowohl Elemente aus $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i)$ als auch Elemente aus $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$.

Somit ist $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_i, a_{i+1})$ die "disjunkte Vereinigung" der beiden Strukturen $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}, a_1, \dots, a_i)$ und $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$.

Um $(*)_{i+1}$ zu gewährleisten, genügt es daher, ein $b_{i+1} \in B$ zu finden, für das gilt:

(I) $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$ und

(II) $b_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_i)$.

(Beachte: Dann gilt nämlich $\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 \dots a_i a_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 \dots b_i b_{i+1})$)

Sei $\rho$ der $\ell$-Umgebungstyp von $a_{i+1}$ in $\mathfrak{A}$, d.h

$\rho := \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$.

Man sieht leicht, dass aus Voraussetzung (2) wegen $\ell \leq 3^m$ folgt:

$$① : \boxed{\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \#_\rho(\mathfrak{A}), \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (k+m)\cdot e}$$

Aus $\circledast_i$ und $L = 3\ell+1$ und Voraussetzung (1) folgt außerdem:

$$② : \begin{aligned} &|\{a' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 \ldots a_i) \;:\; \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho\}| \\ \underset{\circledast_i}{=}\ &|\{b' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 \ldots b_i) \;:\; \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b') \cong \rho\}| \\ \underset{(1)}{\leq}\ &(k+m-1)\cdot e \end{aligned}$$

Aus ① und ② folgt für

$z := |\{b' \in B : b' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1 \ldots b_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b') \cong \rho\}|$,

dass

$$z = |\{a' \in A : a' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1, \ldots, a_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a') \cong \rho\}|$$

$$\geq 1 \quad (\text{da } a_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1 \ldots a_i) \text{ und } \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1}) \cong \rho)$$

oder

$$z \geq (k+m)\cdot e - (k+m-1)\cdot e = e \geq 1$$

Wegen $z \geq 1$ kann Dupl. also ein $b_{i+1} \in B$ finden mit

$\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_{i+1}) \cong \mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{i+1})$ und $b_{i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1, \ldots, b_i)$.

Die Bedingung $\circledast_{i+1}$ ist dann nach Runde $i+1$ erfüllt.

Für $i=m$ gilt insbes nach Runde $m$, dass (beachte: $r_m = 0$)

$$\mathcal{W}_0^{\mathfrak{A}}(\vec{c}^{\mathfrak{A}}, a_1,\dots,a_m) \cong \mathcal{W}_0^{\mathfrak{B}}(\vec{c}^{\mathfrak{B}}, b_1,\dots,b_m),$$

d.h. Duplicator hat die Partie gewonnen.

$\square_{\text{Satz von Hanf}}$

## Die Hanf-Lokalität der Logik erster Stufe:

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium, mit dem man leicht zeigen kann, dass zwei Strukturen $m$-äquivalent sind.
Der Satz von Hanf besagt, dass alle FO-Sätze der Quantorentiefe $m$ in dem Sinne "lokal" sind, dass sie nur über Umgebungen vom Radius $3^m$ "sprechen können".
Im Folgenden wird diese Lokalität der Logik erster Stufe etwas genauer dargestellt.

**Definition 3.29** (Hanf-Lokalität)

Sei $\sigma$ eine relationale Signatur (d.h. $\sigma$ enthält keine Funktions- und keine Konstantensymbole).

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche $\sigma$-Strukturen und sei $r \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $r$-bijektiv, kurz: $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$, falls für jeden $r$-Umgebungstyp $\rho$ gilt: $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.

(6) Sei $S$ eine Klasse endlicher $\sigma$-Strukturen und sei $C \subseteq S$.

$C$ heißt Hanf-lokal in $S$, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

Falls $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$, so $(\mathfrak{A} \in C \iff \mathfrak{B} \in C)$.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Hanf erhält man:

**Satz 3.30** (Hanf-Lokalität von FO)

Sei $\sigma$ eine endliche relationale Signatur und sei $S$ eine Klasse endlicher $\sigma$-Strukturen. Dann gilt für jeden FO[$\sigma$]-Satz $\varphi$:

$\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ ist Hanf-lokal in $S$.

Beweis:

Sei $m := qr(\varphi)$ und sei $r := 3^m$.

Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ mit $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$ gilt:

Für jeden $3^m$-Umgebungstyp $\rho$ ist $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.

Somit ist Voraussetzung (2) des Satzes von Hanf erfüllt.

Voraussetzung (1) und (3) sind erfüllt, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind und da $\sigma$ keine Konstantensymbole enthält.

Gemäß Satz von Hanf gilt daher: $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$.

Wegen $m = qr(\varphi)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$.

Somit ist $\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ Hanf-lokal in $S$. $\square$

Bemerkung 3.31

Indem man zeigt, dass eine Klasse $C$ nicht Hanf-lokal in $S$ ist, kann man (unter Verwendung von Satz 3.30) folgern, dass $C$ nicht FO-definierbar in $S$ ist.

Dass $C$ nicht Hanf-lokal in $S$ ist, kann man dadurch zeigen, dass man für jede Zahl $r \in \mathbb{N}$ Strukturen $\mathfrak{A}_r \in C$ und $\mathfrak{B}_r \in S \setminus C$ mit $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$ angibt.

Beispiel 3.32

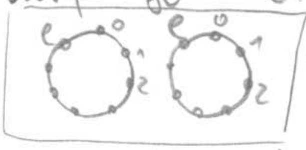
Die Verwendung der Hanf-Lokalität von FO liefert einen alternativen Beweis von Satz 3.25 (a):

Conn ist nicht FO-definierbar in UGraphs.

Beweis: Gemäß Bemerkung 3.31 reicht es, zu zeigen, dass Conn nicht Hanf-lokal in UGraphs ist. Wir müssen also für jedes $r \in \mathbb{N}$ einen zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A}_r$ und einen nicht-zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{B}_r$ finden, so dass $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$.

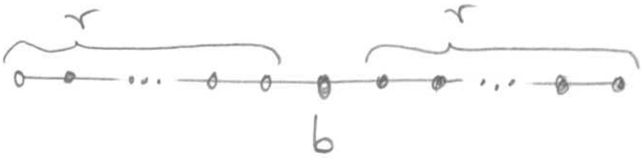
Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig.

Als $\mathfrak{B}_r$ wählen wir einen Graph, der aus zwei disjunkten Kreisen auf je $\ell+1$ Knoten besteht, wobei $\ell \geq 2r+1$ ist.

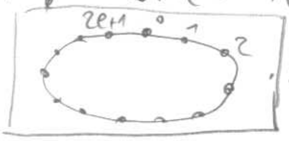


$\mathfrak{B}_r$

Wegen $\ell \geq 2r+1$ sieht jeder $r$-Umgebungstyp eines Knotens $b \in B_r$ folgendermaßen aus:

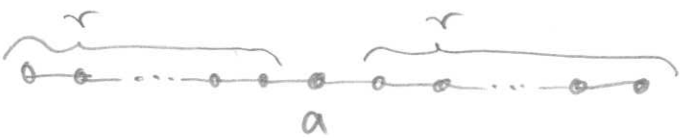
$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b)$: 


Als Struktur $\mathfrak{A}_r$ wählen wir einen Kreis, der genausoviele Knoten wie $\mathfrak{B}_r$ hat. D.h. $\mathfrak{A}_r$ ist ein Kreis auf $2\ell+2$ Knoten.



$\mathfrak{A}_r$

Jeder $r$-Umgebungstyp eines Knotens $a \in A_r$ sieht folgendermaßen aus:

$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a)$: 


D.h.: Für alle $a \in A_r$ und $b \in B_r$ ist $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}_r}(a) \cong \mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}_r}(b)$.

Somit gilt für jeden $r$-Umgebungstyp $\rho$: $\#_\rho(\mathfrak{A}_r) = \#_\rho(\mathfrak{B}_r)$, also $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$.

Wegen $\mathfrak{A}_r \in$ Conn, $\mathfrak{B}_r \in$ UGraphs $\setminus$ Conn ist Conn daher nicht Hanf-lokal in UGraphs, also auch nicht FO-definierbar in UGraphs.

↳ Bsp 3.32

## 3.5 Der Satz von Fraïssé

Die Charakterisierung der m-Äquivalenz durch EF-Spiele ist eine gute Sichtweise, um Beweisideen zu finden, indem man nach einer Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel sucht. Um Nichtausdrückbarkeitsbeweise exakt aufschreiben zu können, ist die im Folgenden vorgestellte Charakterisierung von Fraïssé sehr elegant.

**Definition 3.33** ($\mathrm{Part}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$)

(a) Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\sigma$-Strukturen, so bezeichnet $\mathrm{Part}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ die Menge aller partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

(b) Wir schreiben $p: a_1,\dots,a_k \mapsto b_1,\dots,b_k$ um die Abbildung $p$ mit $\mathrm{Def}(p)=\{a_1,\dots,a_k\}$ und $p(a_i)=b_i$ f.a. $i\in\{1,\dots,k\}$ zu bezeichnen.

(c) Oft identifizieren wir eine Abbildung $p$ mit ihrem Graph $\{(a,p(a)) : a\in \mathrm{Def}(p)\}$.
Insbes. bedeutet $p\subseteq q$, dass $q$ eine Erweiterung von $p$ ist, d.h. $\mathrm{Def}(p)\subseteq \mathrm{Def}(q)$ und $p(a)\overset{!}{=}q(a)$ f.a. $a\in \mathrm{Def}(p)$.

$p(a) = q(a)$ f.a. $a \in \mathrm{Def}(p)$.

Definition 3.34 ($W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\sigma$-Strukturen, und sei $m \in \mathbb{N}$.
Die Menge $W_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ aller Gewinnpositionen für Duplicator besteht aus allen Abbildungen

$$p : \vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma},$$

für die $\vec{a}' = a_1', \dots, a_k' \in A$, $\vec{b}' = b_1', \dots, b_k' \in B$, $k \in \mathbb{N}$, so dass Duplicator das Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A},\vec{a}',\mathfrak{B},\vec{b}')$ gewinnt.

---

Definition 3.34 (Hin-und-Her-System; $m$-Isomorphie)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur und sei $m \in \mathbb{N}$.
Zwei $\sigma$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $m$-isomorph (kurz: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), falls es eine Folge $(I_j)_{j=0,\dots,m}$ mit den folgenden 3 Eigenschaften gibt:

(1) Für jedes $j \in \{0,\dots,m\}$ ist $\emptyset \neq I_j \subseteq \mathrm{Part}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$
(d.h. $I_j$ ist eine nicht-leere Menge partieller Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$)

(2) "Hin-Eigenschaft": Für jedes $j<m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $a \in A$ gibt es ein $q \in I_j$ s.d. $q \supseteq p$ und $a \in \mathrm{Def}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von $p$, in

deren Definitionsbereich $a$ liegt).

(3) "Her-Eigenschaft": Für jedes $j < m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $b \in B$ gibt es ein $q \in I_j$, so dass $q \supseteq p$ und $b \in \mathrm{Bild}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung von $p$, in deren Bild $b$ liegt).

Falls $(I_j)_{j \leq m}$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, so nennen wir $(I_j)_{j \leq m}$ ein Hin-und Her-System (der Ordnung $m$), schreiben $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und sagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind $m$-isomorph vermöge $(I_j)_{j \leq m}$.

Anschaulich bedeuten die Bedingungen (2) und (3) folgendes: In $I_{j+1}$ liegen nur solche partiellen Isomorphismen $p$, die sich $(j+1)$-mal erweitern lassen. Die Erweiterungen $p_j, p_{j-1}, \ldots, p_0$, die man dabei nacheinander erhält, sind allesamt partielle Isomorphismen, die in den Mengen $I_j, I_{j-1}, \ldots, I_0$ liegen.

Der folgende Satz besagt, dass zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau dann $m$-isomorph sind, wenn Duplicator das $m$-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewinnt. Zur Formulierung des Satzes brauchen wir noch folgende Definition:

## Definition 3.35 ($W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$)

Sei $\sigma$ eine Funktionen-freie Signatur.

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\sigma$-Strukturen, und es sei $m \in \mathbb{N}$.

Die Menge $W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aller

Gewinnpositionen für Duplicator besteht aus

allen Abbildungen

$$p: \vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \sigma} \longmapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c \in \sigma},$$

für die $\vec{a}' = a_1', \dots, a_k' \in A$, $\vec{b}' = b_1', \dots, b_k' \in B$, $k \in \mathbb{N}$

so dass Duplicator das Spiel

$\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ gewinnt.

## Satz 3.36

Sei $\sigma$ eine endliche, Funktionen-freie Signatur.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\sigma$-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$,
$\vec{a}' = a'_1, \dots, a'_k \in A$ und $\vec{b}' = b'_1, \dots, b'_k \in B$.

Dann sind äquivalent:

(a) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im Spiel
$\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$

(b) $(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$\left(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c \in \sigma}\right) \in W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$$

(c) Es gibt $(I_j)_{j \leq m}$, so dass $(I_j)_{j \leq m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$$\left(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \sigma} \longmapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c \in \sigma}\right) \in I_m.$$

**Beweis:**

"(a) ⇒ (b)": Gilt gemäß der Definition der Menge $W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ die Gewinnpositionen für Duplicator.

"(b) ⇒ (c)": Gilt mit $(I_j)_{j \leq m} := (W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))_{j \leq m}$.

"(c) ⇒ (a)": Gemäß Voraussetzung gibt es $(I_j)_{j\le m}$, so dass $(I_j)_{j\le m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und

$(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}) \in I_m$.

Per Induktion nach $i$ zeigen wir, dass Duplicator $(I_j)_{j\le m}$ nutzen kann, um das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}', \mathfrak{B}, \vec{b}')$ so zu spielen, dass für jedes $i \in \{0,\dots,m\}$ gilt.

$(*)_i$: Sind $a_1,\dots,a_i$ bzw $b_1,\dots,b_i$ die in den Runden $1,\dots,i$ in $A$ bzw $B$ gewählten Elemente, so gibt es einen partiellen Isomorphismus $p \in I_{m-i}$, so dass $a'_1,\dots,a'_k, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma}, a_1,\dots,a_i \in Def(p)$ und

$p(a'_j) = b'_j$ für alle $j \in \{1,\dots,k\}$,

$p(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$ für alle $c \in \sigma$ und

$p(a_j) = b_j$ für alle $j \in \{1,\dots,i\}$.

$\underline{i=0}$: $(*)_0$ gilt, da $(\vec{a}', (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}', (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}) \in I_m$.

$\underline{i \to i+1}$: Sei $p$ der partielle Isomorphismus aus $I_{m-i}$, der gemäß Induktionsannahme $(*)_i$ existiert.

<u>Fall 1</u>: Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $a_{i+1} \in A$.

Gemäß der "Hin-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in $I_{m-i-1}$, in deren Definitionsbereich $a_{i+1}$ liegt.

Duplicator kann in Runde $i+1$ daher mit $b_{i+1} := q(a_{i+1})$ antworten und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt.

Fall 2: Spoiler wählt in Runde $i+1$ ein $b_{i+1} \in B$.

Gemäß der "Her-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in $I_{m-i-1}$, in deren Bild $b_{i+1}$ liegt.

Duplicator kann daher mit einem $a_{i+1}$ antworten, für das $q(a_{i+1}) = b_{i+1}$ gilt, und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt. $\square$

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht und Satz 3.36 erhalten wir:

Korollar 3.37

Sei $\sigma$ eine endliche, funktionen-freie Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\sigma$-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

Äquivalent sind:

(a) $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$ (d.h. Dupl. gewinnt das $m$-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$)

(b) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$

(c) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

(d) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}}$

Die Äquivalenz von (b) und (c), d.h.

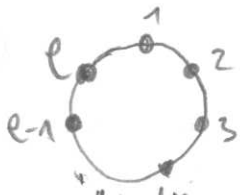
$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$

ist als "Satz von Fraïssé" bekannt.

## Beispiel 3.38

Die Verwendung des Satzes von Fraïssé liefert einen alternativen Beweis von Satz 3.25(a):
Conn ist nicht FO-definierbar in UGraphs:

Beweis: Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $G_\ell$ ein ungerichteter Kreis der Länge $\ell$, d.h. $G_\ell$ hat Knotenmenge $\{1, \dots, \ell\}$ und Kantenmenge




$$E^{G_\ell} := \{(i, i+1) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(\ell, 1)\} \cup \{(i+1, i) : 1 \leq i < \ell\} \cup \{(1, \ell)\}$$

Für $\ell, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $G_{\ell,k}$ die disjunkte Vereinigung von $G_\ell$ und $G_k$, d.h. $G_{\ell,k}$ besteht aus zwei ungerichteten Kreisen der Längen $\ell$ und $k$.

Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $\ell, k$ mit $\ell, k > 2^m$ gilt: $G_\ell \equiv_m G_{\ell,k}$.

Dazu sei für jedes $j \in \{0, \dots, m\}$ $I_j$ die Menge aller partiellen Isomorphismen $p$ von $G_\ell$ nach $G_{\ell,k}$, für die gilt:

- $|\mathrm{Def}(p)| \leq m - j$ und
- für alle $a, a' \in \mathrm{Def}(p)$ gilt:
  $\mathrm{Dist}^{G_\ell}(a, a') = \mathrm{Dist}^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a'))$ oder
  $\mathrm{Dist}^{G_\ell}(a, a'), \mathrm{Dist}^{G_{\ell,k}}(p(a), p(a')) \geq 2^{j+1}$.

<u>Beachte</u>: $I_m$ besteht gerade aus der Abbildung "$\emptyset$", deren Definitionsbereich leer ist.

Per Induktion kann man leicht nachweisen, dass $I_j$ für jedes $j \in \{m, m-1, \dots, 0\}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat und dass $I_j \neq \emptyset$ ist.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$(I_j)_{j \le m} : G_\ell \cong_m G_{\ell,k}$, d.h.

$G_\ell$ und $G_{\ell,k}$ sind $m$-isomorph.

Gemäß des Satzes von Fraïssé gilt daher f.a. $m \in \mathbb{N}$ und alle $k, \ell$ mit $k, \ell > 2^m$, dass $G_\ell \equiv_m G_{\ell,k}$.

Da $G_\ell$ zusammenhängend ist, $G_{\ell,k}$ aber nicht, folgt, dass Conn <u>nicht</u> FO-definierbar in UGraphs ist. $\square$