Kapitel 3:
Die Auswertungskomplexität von FO in endlichen Strukturen

Sei σ eine endliche <u>relationale</u> Signatur (dh σ besteht aus endlich vielen Relationssymbolen).

Als Eingabe für Algorithmen repräsentieren wir eine endliche σ-Struktur wie folgt:

- Die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ repräsentieren wir durch Objekte eines geeigneten Datentyps Θ (etwa <u>integer</u> oder <u>string</u>).

  Das Universum A von $\mathfrak{A}$ wird dann als Liste von Objekten vom Typ Θ repräsentiert.

- Ein r-Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$ repräsentieren wir als Liste von Objekten vom Typ Θ.

  Für jedes $R \in \sigma$ repräsentieren wir die Relation $R^{\mathfrak{A}}$ dann als Liste aller r-Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$ (für $r := ar(R)$).

Man beachte, dass die Repräsentation von $\mathfrak{A}$ dann ungefähr die Größe

$$|\sigma| + |A| + \sum_{R \in \sigma} |R^{\mathfrak{A}}| \cdot ar(R)$$

hat.

Definition 3.1

Sei σ eine endliche relationale Signatur.

(a) Die Größe $\|\mathfrak{A}\|$ einer endlichen σ-Struktur ist definiert als

$$\|\mathfrak{A}\| := |\sigma| + |A| + \sum_{R\in\sigma} |R^{\mathfrak{A}}| \cdot ar(R)$$

(b) Die Länge (bzw. Größe) $\|\varphi\|$ einer FO[σ]-Formel φ ist die Länge von φ, betrachtet als Wort über dem Alphabet A_σ (siehe Definition 1.13, 1.14, 1.16).

Definition 3.2

(a) Eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt endlich, falls ihr Universum A nur endlich viele Elemente enthält.

(b) FIN_σ bezeichnet die Klasse aller endlichen σ-Strukturen.

(c) FIN bezeichnet die Klasse aller endlichen σ-Strukturen, für alle endlichen relationalen Signaturen σ.

Unsere bisherige Sichtweise auf die Semantik der Logik erster Stufe war, dass FO[σ]-Formeln in σ-Interpretationen ausgewertet werden, so dass für jede FO[σ]-Formel φ und jede zu φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

entweder $\mathcal{I} \models \varphi$ oder $\mathcal{I} \not\models \varphi$.

Eine alternative Sichtweise ist, dass Formeln Relationen in Strukturen definieren.

<u>Definition 3.3</u>

Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$, alle FO[σ]-Formeln φ und alle Tupel $(x_1,\dots,x_k) \in \mathrm{Var}^k$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1,\dots,x_k\}$ ist

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{ (a_1,\dots,a_k) \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_k] \}$$

die von φ in $\mathcal{A}$ definierte k-stellige Relation.

<u>Vorsicht</u>: Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch von dem Tupel $(x_1,\dots,x_k) \in \mathrm{Var}^k$. Wenn wir die Notation $\varphi(\mathcal{A})$ verwenden, müssen wir daher immer vorher angeben, auf welche Variablen(reihenfolge) sie sich bezieht.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden nur $FO[\sigma]$-Formeln, in denen keins der Symbole $\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ vorkommt (gemäß Beobachtung 2.2 ist dies keine wirkliche Einschränkung).

Beobachtung 3.4:

Ist σ eine relationale Signatur und $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, so können wir für $FO[\sigma]$-Formeln φ und Variablentupel $(x_1, \dots, x_k) \in Var^k$ mit $frei(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ die Relation $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq A^k$ rekursiv wie folgt beschreiben:

- Falls φ von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$, für $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{ (a_1, \dots, a_k) \in A^k \ : \ a_{i_1} = a_{i_2} \}$$
- Falls φ von der Form $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$, für $R \in \sigma$, $r := ar(R)$ und $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{ (a_1, \dots, a_k) \in A^k : (a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathfrak{A}} \}$$

- Falls φ von der Form $\neg\varphi_1$ ist, so ist

$$\varphi(\mathfrak{A}) = A^k \setminus \varphi_1(\mathfrak{A})$$

- Falls φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ist, so ist

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \varphi_1(\mathfrak{A}) \cup \varphi_2(\mathfrak{A})$$

- Falls φ von der Form $\exists x_{k+1}\, \varphi_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ ist, so ist

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{ (a_1, \dots, a_k) \in A^k : \text{ es gibt ein } a_{k+1} \in A \text{ s.d. } (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in \varphi_1(\mathfrak{A}) \}.$$

<u>Definition 3.5</u>

Das Auswertungsproblem der Logik erster Stufe auf der Klasse aller endlichen relationalen Strukturen ist wie folgt definiert:

<u>Auswertungsproblem für FO auf FIN</u>   <u>Eingabe</u>: Eine endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$, wobei σ eine endliche relationale Signatur ist, und eine FO[σ]-Formel φ <u>Ziel</u>: Berechne $\varphi(\mathfrak{A})$ (bzgl. dem Variablentupel $(x_1, \dots, x_k)$ mit $\text{frei}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$ und $k = \lvert \text{frei}(\varphi) \rvert$)

Beobachtung 3.4 führt unmittelbar zu einem rekursiven Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO auf FIN löst.

Die genaue Laufzeit des Algorithmus hängt von dem folgenden Parameter ab:

Definition 3.6

Die Breite (engl: width) $br(\varphi)$ einer $FO[\sigma]$-Formel φ ist die maximale Anzahl freier Variablen in Subformeln von φ, d.h.

$$br(\varphi) = \max\{\,|frei(\psi)| : \psi \in sub(\varphi)\,\}$$

(vgl. Definition 1.19: $sub(\varphi)$ ist die Menge aller Subformeln von φ — beachte: $\varphi \in sub(\varphi)$).

Satz 3.7

Es gibt einen Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO auf FIN bei Eingabe einer Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Formel φ in Zeit

$$O\left(\|\varphi\| \cdot \|\mathfrak{A}\|^{br(\varphi)} \cdot br(\varphi) + \|\varphi\| + \|\mathfrak{A}\|\right)$$

löst.

Beweis:
Durch geschickte Implementierung des rekursiven Algorithmus, der sich aus Beobachtung 3.4 ergibt.
(Beachte: $|sub(\varphi)| \leq \|\varphi\|$).

Details: Übung $\square$

Beobachtung 3.8

(a) $br(\varphi) \leq \|\varphi\|$

(b) $br(\varphi) \leq |\{x \in var : x \text{ kommt in } \varphi \text{ vor}\}|$

(c) Für jede FO[σ]-Formel φ gibt es eine zu φ äquivalente FO[σ]-Formel $\tilde{\varphi}$ mit $frei(\tilde{\varphi}) = frei(\varphi)$, in der höchstens $br(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.

Beweis: Übung

Satz 3.9
Das Auswertungsproblem für FO auf FIN ist vollständig für die Komplexitätsklasse PSPACE aller auf polynomiellem Platz lösbaren Probleme.
(Hier ohne Beweis. Ein Beweis dieses Satzes wird in der Vorlesung "Logik und Komplexität" gegeben)