Kapitel 10:

Gödels Unvollständigkeitssätze

10.1 Theorien und Axiomatisierbarkeit

Definition 10.1 (Theorie) Sei σ eine abzählbare, entscheidbare Signatur.

(a) Eine σ-Theorie (kurz: Theorie) ist eine Menge T von $FO[\sigma]$-Sätzen, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, d.h. für alle $FO[\sigma]$-Sätze φ gilt

Falls $T \models \varphi$, so $\varphi \in T$.

(b) Eine Theorie T ist vollständig, wenn für alle $FO[\sigma]$-Sätze φ gilt:

$\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$

(c) Eine Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen ist ein Axiomensystem für eine Theorie T (kurz: Φ axiomatisiert T), wenn gilt:

$$T = \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[\sigma]\text{-Satz mit } \Phi \models \varphi \}$$

(d) Eine Theorie T heißt endlich axiomatisierbar, wenn sie ein endliches Axiomensystem besitzt.

(e) Eine Theorie T heißt effektiv axiomatisierbar, wenn sie ein entscheidbares Axiomensystem besitzt.

Beispiel:

- Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist $Th(\mathfrak{A})$ eine vollständige σ-Theorie.
- Die Gruppentheorie T_{Gr} ist die Menge aller $FO[\sigma_{Gr}]$-Sätze, die aus den Gruppenaxiomen folgen (wobei $\sigma_{Gr} := \{\circ\}$ aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $\circ$ besteht). (Details: siehe Buch von Ebbinghaus, Flum, Thomas).

(Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze)

Als Folgerung aus Lemma 9.2 erhalten wir:

Korollar 10.2 (entscheidbare Theorien)

(a) Jede effektiv axiomatisierbare Theorie ist rekursiv aufzählbar.

(b) Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie T ist entscheidbar.

Beweis:

(a) folgt direkt aus Lemma 9.2.

(b) Fall 1: T ist widerspruchsfrei. Da T vollständig ist gilt dann für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ: entweder $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$.

Bei Eingabe eines $FO[\sigma]$-Satzes φ kann unser Algorithmus zum Entscheiden, ob $\varphi \in T$ oder $\varphi \notin T$ daher wie folgt vorgehen: Nutze den Algorithmus aus Teil (a), um T aufzuzählen, bis entweder φ oder $\neg\varphi$ ausgegeben wird und gib entsprechend "$\varphi \in T$" bzw "$\varphi \notin T$" aus.

<u>Fall 2</u>: T ist widerspruchsvoll (d.h. es gibt eine $FO[\sigma]$-Formel ψ mit $T \models \psi$ und $T \models \neg\psi$). Dann ist T nicht erfüllbar. Somit gilt f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$: $T \models \varphi$. Da T unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen ist, ist T daher die Menge <u>aller</u> $FO[\sigma]$-Sätze. Diese ist gemäß Annahme 9.1 (a) entscheidbar.

$\square$

10.2 Die Minimale Arithmetik

<u>Definition 10.3</u> (Die Theorie Q)

Die <u>minimale Arithmetik</u> ist die σ_{Ar}-Theorie Q, die von den folgenden $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen axiomatisiert wird:

$\varphi_{(Q1)} := \forall x \; \neg\, 0 = x+1$

$\varphi_{(Q2)} := \forall x \forall y \; (x+1 = y+1 \rightarrow x=y)$

$\varphi_{(Q3)} := \forall x \; x+0 = x$

$\varphi_{(Q4)} := \forall x \forall y \; x+(y+1) = (x+y)+1$

$\varphi_{(Q5)} := \forall x \; x \cdot 0 = 0$

$\varphi_{(Q6)} := \forall x \forall y \; x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x$

$\varphi_{(Q7)} := \forall x \; (x \leq 0 \leftrightarrow x=0)$

$\varphi_{(Q8)} := \forall x \forall y \; (x \leq y+1 \leftrightarrow (x=y+1 \vee x \leq y))$

$\varphi_{(Q9)} := \forall x \forall y \; (x \leq y \vee y \leq x)$

Lemma ~~10.4~~ ("Korrektheit" von Q)

Es gilt: $Q \subseteq Th(\mathcal{N})$,

und für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$, so $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$.

Beweis: Man sieht leicht, dass für jedes Axiom ψ von Q gilt: $\mathcal{N} \models \psi$.

Daher gilt auch für jede Formel $\psi' \in Q$, dass $\mathcal{N} \models \psi'$. Somit gilt: $Q \subseteq Th(\mathcal{N})$.

Insbes. gilt daher f.a. Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in FO[\sigma_{Ar}]$ und f.a. $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ folgendes:

Falls $Q \models \varphi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$, so $\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$,

dh $\mathcal{N} \models \varphi[n_1, \dots, n_k]$.

$\square$

Bemerkung:

Q ist eine σ_{Ar}-Theorie, für die gilt

(1) Q ist widerspruchsfrei (da erfüllbar durch $\mathcal{N}$),

(2) Q ist effektiv axiomatisierbar
(da Q ein endliches Axiomensystem besitzt)

und Q ist unvollständig (denn: $\mathcal{N} \models Q \Rightarrow$
falls Q vollständig wäre, so wäre $Q = Th(\mathcal{N})$.
Wegen (2) und Korollar 10.2 wäre $Th(\mathcal{N})$ dann
entscheidbar. ↯ Widerspruch zu Satz 9.22).

$Th(\mathcal{N})$ ist nicht r.e.

Gödels erster Unvollständigkeitssatz besagt folgendes:

Jede σ_{Ar}-Theorie T, für die gilt:

(1) T ist widerspruchsfrei (d.h. erfüllbar),

(2) T ist effektiv axiomatisierbar (d.h. sie besitzt ein entscheidbares Axiomensystem),

und

(3) $T \supseteq Q$ (d.h. T umfasst die "minimale Arithmetik")

ist unvollständig (d.h. es gibt einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ, so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgt).

Um Gödels ersten Unvollständigkeitssatz beweisen zu können, müssen wir zunächst ein etwas genaueres Verständnis der "minimalen Arithmetik" Q erlangen.

10.2.1 Der Σ_1-Transfersatz

Unser erstes "Etappenziel" dabei ist, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 10.5 (Der Σ_1-Transfersatz)
Für jede Σ_1-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$$

Die Richtung "$\Leftarrow$" des Σ_1-Transfersatzes folgt unmittelbar aus Lemma 10.4

Um die Richtung "$\Rightarrow$" des Σ_1-Transfersatzes zu beweisen, verwenden wir die beiden folgenden Lemmas, die uns ein genaueres Verständnis darüber liefern, wie die Modelle von Q aussehen.

Lemma 10.6

Sei $\mathfrak{A}$ eine σ_{Ar}-Struktur mit $\mathfrak{A} \models Q$.
Dann gilt f.a. $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in A$:

(a) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} = \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff m = n$

(b) $a \leq^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathfrak{A}}, \underline{1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{A}}\}$

(c) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} \leq^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} \iff m \leq n$

(d) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} +^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} = \underline{m+n}^{\mathfrak{A}}$

(e) $\underline{m}^{\mathfrak{A}} \times^{\mathfrak{A}} \underline{n}^{\mathfrak{A}} = \underline{m \cdot n}^{\mathfrak{A}}$

(f) $0^{\mathfrak{A}} = \underline{0}^{\mathfrak{A}}$ und $1^{\mathfrak{A}} = \underline{1}^{\mathfrak{A}}$.

Beweis:

(a): "$\Leftarrow$": klar, denn $m = n \Rightarrow \underline{m} = \underline{n} \Rightarrow \underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$.

"$\Rightarrow$": Beweis per Induktion nach m. Zeigen wir, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt: für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}} \Rightarrow m = n)$.

$m = 0$: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{0}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. Zu zeigen: $0 = n$.

Angenommen, $n \neq 0$. Dann ist $n > 0$ und es gilt: $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$.

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q1)}$ gilt insbes.: $\mathfrak{N} \models \neg 0 = \underline{n-1} + 1$.

Somit gilt: $0^{\mathfrak{N}} \neq \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. ↯ Wid zu $\underline{0}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$ und $\underline{0} = 0$.

$m \to m+1$: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\underline{m+1}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$. Zu zeigen: $m+1 = n$.

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q1)}$ und $\underline{m+1} = \underline{m} + 1$ gilt:

$\mathfrak{N} \models \neg 0 = \underline{m+1}$. Somit gilt $0^{\mathfrak{N}} \neq \underline{m+1}^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$

Daher: $n \neq 0$, d.h. $n > 0$ (denn ang. $n = 0$, so $\underline{n} = \underline{0}$ und $0^{\mathfrak{N}} = \underline{n}^{\mathfrak{N}}$ ↯)

Somit: $\underline{n} = \underline{n-1} + 1$ (mit $n-1 \in \mathbb{N}$)

Wegen $\mathfrak{N} \models \Psi_{(Q2)}$ folgt, dass $\underline{m}^{\mathfrak{N}} = \underline{n-1}^{\mathfrak{N}}$.

Gemäß Induktionsannahme gilt $m = n-1$.

Daher $m+1 = n$.

$\square_{(a)}$

(b) Aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q7)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q8)}$ folgt induktiv, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{N} \models \forall x \left(x \leq \underline{n} \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{n} x = \underline{i} \right)$$

Daraus folgt, dass f.a. $a \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a \leq^{\mathfrak{N}} \underline{n}^{\mathfrak{N}} \iff a \in \{\underline{0}^{\mathfrak{N}}, \underline{1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{N}}\}.$$

(c) Wegen (a) und (b) gilt:

$$\begin{aligned} \underline{m}^{\mathfrak{N}} \leq^{\mathfrak{N}} \underline{n}^{\mathfrak{N}} &\iff \underline{m}^{\mathfrak{N}} \in \{\underline{0}^{\mathfrak{N}}, \underline{1}^{\mathfrak{N}}, \dots, \underline{n}^{\mathfrak{N}}\} \\ &\iff m \in \{0, 1, \dots, n\} \\ &\iff m \leq n. \end{aligned}$$

(d) Folgt induktiv aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q3)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q4)}$.

(e) Folgt induktiv aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q5)}$ und $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q6)}$.

(f) $0^{\mathfrak{N}} = \underline{0}^{\mathfrak{N}}$ gilt, da $0 = \underline{0}$.

$1^{\mathfrak{N}} = \underline{1}^{\mathfrak{N}}$ folgt aus $\mathfrak{N} \models \psi_{(Q3)}$, da $\underline{1} = 0+1$.

$\square$ Lea 10.6

Bemerkung 10.7

Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von Q, so sei $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$ die folgendermaßen definierte Substruktur von $\mathfrak{A}$:

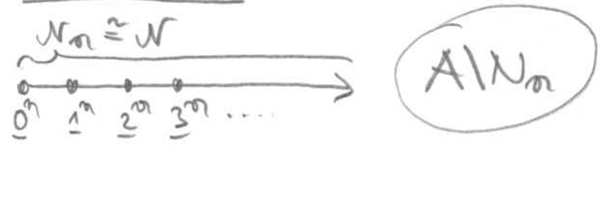
- Universum von $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$: $N_{\mathfrak{A}} := \{ \underline{n}^{\mathfrak{A}} : n \in \mathbb{N} \}$
- F.a. $a, b \in N_{\mathfrak{A}}$ sei
  - $a \leq^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b \;:\Leftrightarrow\; a \leq^{\mathfrak{A}} b$
  - $a +^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b := a +^{\mathfrak{A}} b$
  - $a \times^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} b := a \times^{\mathfrak{A}} b$

  Addition und Multiplikation sind wegen Lemma 9.28 d) e) wohldefiniert (für $a = \underline{m}^{\mathfrak{A}}$ und $b = \underline{n}^{\mathfrak{A}}$ gilt: $a +^{\mathfrak{A}} b = \underline{m+n}^{\mathfrak{A}} \in N_{\mathfrak{A}}$)
- Ferner sei $0^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} := \underline{0}^{\mathfrak{A}}$ und $1^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} := \underline{1}^{\mathfrak{A}}$ (klar: $0^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}}, 1^{\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}} \in N_{\mathfrak{A}}$ wegen Lemma 9.28 f))

Beachte: Aus Lemma 10.6 folgt:

$\mathcal{N}_{\mathfrak{A}} \cong \mathcal{N}$, da $\pi : (n \mapsto \underline{n}^{\mathfrak{A}})_{n \in \mathbb{N}}$ ein Isomorphismus ist. Außerdem gilt wegen Lemma 10.6 b) und Axiom $\psi_{(Q3)}$ f.a. $a \in A \setminus N_{\mathfrak{A}}$, dass $\underline{n}^{\mathfrak{A}} \leq a$ (f.a. $n \in \mathbb{N}$). Somit ist $N_{\mathfrak{A}}$ ein "Anfangsstück" von $\mathfrak{A}$ bzgl. $\leq^{\mathfrak{A}}$.

Skizze von $\mathfrak{A}$:



Zum Beweis des Σ_1-Transfersatzes benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 10.8

Für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Q gilt:

(a) Ist $t(x_1, \dots, x_k)$ ein σ_{Ar}-Term und sind $n, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$t^{\mathfrak{M}}[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}] = \underline{n}^{\mathfrak{M}} \iff t^{\mathfrak{N}}[m_1, \dots, m_k] = n$$

(b) Ist $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \Delta_0$ und sind $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}] \iff \mathfrak{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$$

(c) Ist $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \Sigma_1$ und sind $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, so gilt:

Falls $\mathfrak{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k]$, so $\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$

Beweis:

(a) Einfache Induktion über den Aufbau von t unter Verwendung von Lemma 10.6.

(b): Per Induktion über den Aufbau von $\varphi \in \Delta_0$:

- φ ist von der Form $t_1 = t_2$ oder $t_1 \leq t_2$:

  folgt direkt aus (a) und Lemma 10.6 c).

- φ ist von der Form $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$ oder $(\psi_1 \wedge \psi_2)$:

  folgt direkt aus der Induktionsannahme

- φ ist von der Form $\forall y \leq t\, \psi$:

  Sei $t = t(x_1, \dots, x_k)$ und $\psi = \psi(x_1, \dots, x_k, y)$.

  Seien $n, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

  $n = t^{\mathcal{N}}[m_1, \dots, m_k]$ (und wegen a) daher auch

  $\underline{n}^{\mathfrak{M}} = t^{\mathfrak{M}}[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$). Dann gilt:

  $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \dots, m_k] \iff$ f.a. $\ell \leq n$ gilt: $\mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, \ell]$

  $\underset{\text{Ind.annahme}}{\iff}$ f.a. $\ell \leq n$ gilt: $\mathfrak{M} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}, \underline{\ell}^{\mathfrak{M}}]$

  $\underset{\text{Lemma 10.6 b)}}{\iff}$ f.a. $a \leq \underline{n}^{\mathfrak{M}}$ gilt: $\mathfrak{M} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}, a]$

  $\iff$ $\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$.

- φ ist von der Form $\exists y \leq t\, \psi$:

  analog.

(c) Sei φ eine Σ_1-Formel der Form $\exists y\, \psi$,

wobei $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_k, y) \in \Delta_0$.

Seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$.

Dann ex. ein $n \in \mathbb{N}$ s.d. $\mathcal{N} \models \psi[m_1, \ldots, m_k, n]$.

Wegen $\psi \in \Delta_0$ folgt aus (b), dass $\mathfrak{M} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}, \underline{n}^{\mathfrak{M}}]$

Somit gilt (wg $\varphi = \exists y\, \psi$), dass $\mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$.

$\square$

Wir können nun den Σ_1-Transfersatz beweisen:

Beweis von Satz 10.5 (Der Σ_1-Transfersatz)

Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ_1-Formel und sei $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k] \iff Q \vdash \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

Beweis: "$\Leftarrow$": folgt aus Lemma 9.26 (da $\mathcal{N} \models Q$).

"$\Rightarrow$": Es gelte $\mathcal{N} \models \varphi[m_1, \ldots, m_k]$. Sei $\mathfrak{M}$ ein Modell von Q

$\overset{\text{Lemma 10.8c)}}{\Longrightarrow} \mathfrak{M} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{M}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{M}}]$

$\overset{\text{Substitutionslemma}}{\Longrightarrow} \mathfrak{M} \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

$\square$

10.2.2 Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen

Als zweiten Schritt zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz benötigen wir den folgenden Begriff der Repräsentierbarkeit von Relationen und Funktionen.

Definition 10.9 (Repräsentierbarkeit einer Relation)

Sei T eine Menge von $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ eine k-stellige Relation.

(a) Eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ repräsentiert R in T, falls f.a. $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \in R$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$
- Falls $(m_1, \ldots, m_k) \notin R$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k})$.

(b) R heißt repräsentierbar in T, wenn es eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel gibt, die R in T repräsentiert.

Definition 10.10 (Repräsentierbarkeit einer Funktion)

Sei T eine Menge von $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätzen, sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine (totale) Funktion

(a) Eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ **repräsentiert f in T**, wenn gilt:

(1) f.a. $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1.1) Falls $f(m_1, \dots, m_k) = n$, so $T \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

und (1.2) Falls $f(m_1, \dots, m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

(2) f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$T \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, y_2) \big) \rightarrow y_1 = y_2 \Big)$$

Bemerkung: Falls $Q \subseteq T$, so folgt (1.2) aus (1.1) und (2), d.h.: Aus (1.1) und (2) folgt, dass f.a. $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $f(m_1, \dots, m_k) \neq n$, so $T \models \neg\varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

Insbesondere ist also der Graph von f repräsentierbar in T (durch die Formel φ)

(Details: Übung).

Das nächste "Etappenziel" zum Beweis von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz ist, den folgenden Satz zu beweisen:

<u>Satz 10.11</u> (Repräsentierbarkeit (in Q) der berechenbaren Funktionen und entscheidbaren Relationen)

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

<u>(a)</u> Jede TM-berechenbare (totale) Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist in Q repräsentierbar.

<u>(b)</u> Jede TM-entscheidbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist in Q repräsentierbar.

<u>Beweis von (b) unter Verwendung von (a):</u>

Sei $R \subseteq \mathbb{N}^k$ entscheidbar. Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f(m_1, \dots, m_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } (m_1, \dots, m_k) \in R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist f eine totale, TM-berechenbare Funktion.

Gemäß Teil (a) von Satz 10.11 gibt es eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y)$, die f in Q repräsentiert.

Setze $\varphi_R(x_1, \dots, x_k) := \varphi_f(x_1, \dots, x_k, \underline{1})$

<u>Behauptung:</u> φ_R repräsentiert R in Q.

Beweis: Sei $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- $(m_1, \dots, m_k) \in R \underset{\text{Wahl von } f}{\Longrightarrow} f(m_1, \dots, m_k) = 1$

  $\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Longrightarrow} \quad Q \models \varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{1})$

  $\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Longrightarrow} \quad Q \models \varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$

- $(m_1, \dots, m_k) \notin R \underset{\text{Wahl von } f}{\Longrightarrow} f(m_1, \dots, m_k) \neq 1$

  $\underset{\varphi_f \text{ repr. } f \text{ in } Q}{\Longrightarrow} \quad Q \models \neg \varphi_f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{1})$

  $\underset{\text{Wahl von } \varphi_R}{\Longrightarrow} \quad Q \models \neg \varphi_R(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k})$.

Somit gilt: φ_R repräsentiert R in Q.

Dies beendet den Beweis von Satz 10.11 (b) unter Verwendung von Satz 10.11 (a).

Um Satz 10.11 (a) zu beweisen, benutzen wir folgendes Lemma:

Lemma 10.12

(b) Sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine TM-berechenbare totale Funktion.
Dann gibt es Δ_0-definierbare Funktionen $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, \dots, m_k) = h(m_1, \dots, m_k, g(m_1, \dots, m_k))$$

(a) Jede Δ_0-definierbare totale Funktion ist in Q repräsentierbar.

(c) Seien $g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ in Q repräsentierbar, und sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ so definiert, dass f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, \dots, m_k) = h(m_1, \dots, m_k, g(m_1, \dots, m_k)).$$

Dann ist f in Q repräsentierbar.

Beachte: Satz 10.11 (a) folgt unmittelbar aus Lemma 10.12 a)–c).
Um den Beweis von Satz 10.11 abzuschließen, genügt es also, Lemma 10.12 zu beweisen.

Beweis von Lemma 10.12 (a):

Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Δ_1-Formel $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ definiert. Zu zeigen: f ist repräsentierbar in Q.

Sei $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ die folgende $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel:

$$\varphi(x_1, \dots, x_k, y) := \left(\psi(x_1, \dots, x_k, y) \wedge \forall y' < y \ \neg \psi(x_1, \dots, x_k, y') \right)$$

Im Folgenden zeigen wir, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert.

Sei dazu $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Modell von Q.

Behauptung 1:
F.a. $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m_1, \dots, m_k) = n$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$$

Beweis:

Es gilt: $f(m_1, \dots, m_k) = n \underset{\psi \text{ def. } f}{\Longrightarrow} \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n]$

$$\underset{\substack{\Sigma_1\text{-Transfersatz} \\ \text{bzw. Lemma 10.8(b)}}}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{A} \models \psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, \underline{n}^{\mathfrak{A}}].$$

Außerdem gilt f.a. $n' < n$: $f(m_1, \dots, m_k) \neq n' \Longrightarrow$
$\mathcal{N} \models \neg\psi[m_1, \dots, m_k, n'] \Longrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\psi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \dots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, \underline{n'}^{\mathfrak{A}}]$.

Somit gilt gemäß Lemma 10.6 b) und dem Substitutionslemma, dass $\mathfrak{N} \models \forall y' < n \; \neg\psi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

Somit gilt gemäß Definition von φ, dass

$\mathfrak{N} \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$. $\square$ Beh 1.

Behauptung 2:

$$\mathfrak{N} \models \underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_k \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(x_1 \dots x_k, y_1) \wedge \varphi(x_1 \dots x_k, y_2)\big) \to y_1 = y_2 \Big)}_{=: \chi}$$

Beweis:

Seien $a_1, \dots, a_k, b_1, b_2 \in A$ so dass

$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_1]$ und

$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_2]$

Zu zeigen: $b_1 = b_2$.

Wegen $\mathfrak{N} \models Q$ und $\psi_{(Q9)} \in Q$ gilt dann:

$b_1 \leq^{\mathfrak{N}} b_2$ oder $b_2 \leq^{\mathfrak{N}} b_1$. OBdA gelte $b_1 \leq^{\mathfrak{N}} b_2$.

Es gilt:

$$\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_2]$$

$$\underset{\text{Def von } \varphi}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{N} \models \left(\forall y' < y \ \neg\psi(x_1, \dots, x_k, y')\right)\left[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_k}{x_k}, \frac{b_2}{y}\right]$$

Außerdem gilt: $\mathfrak{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_k, b_1]$ und somit

$\mathfrak{N} \models \psi[a_1, \dots, a_k, b_1]$

Daraus folgt, dass $b_1 = b_2$ und daher $\mathfrak{N} \models \chi$.

$\square_{\text{Beh 2}}$

Beachte: Aus den Behauptungen 1 und 2 folgt gemäß Definition 10.10, dass die Formel φ die Funktion f in Q repräsentiert.

$\square$ Beweis von Lemma 10.12 (a)

Beweis von Lemma 10.12 (b)

Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ TM-berechenbar.

Gemäß Satz 9.21 wissen wir, dass f Σ_1-definierbar ist, d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y)$ der Form

$$\exists z\ \psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \quad \text{mit } \psi \in \Delta_0,$$

die f definiert.

Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ sei

$$g(m_1, \dots, m_k) := \min \{ p \in \mathbb{N} : \text{es gibt } n, \ell \leq p \text{ s.d. } \mathbb{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \}.$$

Offensichtlicherweise wird g durch die folgende Δ_0-Formel $\chi(x_1, \dots, x_k, w)$ definiert:

$$\chi(x_1, \dots, x_k, w) := \exists y \leq w\ \exists z \leq w\ \Big(\psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \wedge \forall w' \leq w\ \neg \big(\exists y' \leq w'\ \exists z' \leq w'\ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z') \big) \Big).$$

Sei $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ die folgendermaßen gewählte Funktion: Für alle $m_1, \dots, m_k, p \in \mathbb{N}$ sei

$$h(m_1, \dots, m_k, p) := \begin{cases} \min \{ n \leq p : \text{es gibt ein } \ell \leq p \text{ s.d. } \\ \qquad \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \}, \\ \qquad \text{falls es } n, \ell \leq p \text{ mit } \mathcal{N} \models \psi[m_1, \dots, m_k, n, \ell] \text{ gibt} \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion h wird durch die folgende Δ_0-Formel definiert:

$$\begin{aligned} \xi(x_1, \dots, x_k, w, y) := \\ \Big(\big(y = 0 \wedge \neg \exists y' \leq w \ \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z) \big) \vee \\ \big(y \leq w \wedge \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y, z) \wedge \\ \forall y' < y \ \neg \exists z \leq w \ \psi(x_1, \dots, x_k, y', z) \big) \Big) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass f.a. $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, \dots, m_k) = h(m_1, \dots, m_k, g(m_1, \dots, m_k))$$

$\square$ Beweis von Lemma 10.12(b)

Beweis von Lemma 10.12 (c)

Sei $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_g(x_1, \dots, x_k, y)$ und sei $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ durch die Formel $\varphi_h(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, y)$ in Q repräsentiert. Setze

$$\varphi(x_1, \dots, x_k, y) :: \exists z \Big(\varphi_g(x_1, \dots, x_k, z) \land \varphi_h(x_1, \dots, x_k, z, y) \Big).$$

Im Folgenden zeigen wir, dass diese Formel die Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit

$$f(m_1, \dots, m_k) = h\big(m_1, \dots, m_k, g(m_1, \dots, m_k)\big)$$

in Q repräsentiert.

Behauptung 1: F.a. $m_1, \dots, m_k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(m_1, \dots, m_k) = n \implies Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n}).$$

Beweis:

Sei $\ell := g(m_1, \dots, m_k)$. Dann gilt (gemäß Wahl von φ_g, φ_h, f):

$Q \models \varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{\ell})$ und $Q \models \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{\ell}, \underline{n})$.

Somit: $Q \models \exists z \big(\varphi_g(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, z) \land \varphi_h(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, z, \underline{n}) \big)$,

d.h. $Q \models \varphi(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}, \underline{n})$

$\square$ Beh 1.

<u>Behauptung 2</u>: F.a. $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Q \models \forall y_1 \forall y_2 \Big(\big(\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2) \big) \rightarrow y_1 = y_2 \Big).$$

<u>Beweis</u>: Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von Q und seien $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \models \forall y_1 \forall y_2 \big((\varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_1) \wedge \varphi(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2 \big)$.

Seien dazu $b_1, b_2 \in A$ s.d.

$\mathfrak{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, b_1]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi[\underline{m_1}^{\mathfrak{A}}, \ldots, \underline{m_k}^{\mathfrak{A}}, b_2]$

(zu zeigen: $b_1 = b_2$).

Gemäß Definition von φ gibt es daher $c_1, c_2 \in A$ s.d. gilt:

$$(*) \begin{cases} \mathfrak{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, c_1) \wedge \varphi_h(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, c_1, b_1) \quad \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, c_2) \wedge \varphi_h(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, c_2, b_2). \end{cases}$$

Da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert, gilt $c_1 = c_2$.

Für $n := g(m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{N}$ folgt außerdem:

$\mathfrak{A} \models \varphi_g(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n})$, und somit gilt

(da φ_g die Funktion g in Q repräsentiert): $\underline{n}^{\mathfrak{A}} = c_1 = c_2$.

Mit $(*)$ folgt daher, dass

$\mathfrak{A} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_1)$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_h(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}, \underline{n}, b_2)$.

Da φ_h die Funktion h in Q repräsentiert, folgt, dass

$b_1 = b_2$. $\triangleright$ Beh 2

Aus Beh 1 und Beh 2 folgt unmittelbar, dass φ die Funktion f in Q repräsentiert. $\triangleright$ Lea 16.12

10.3 Der Fixpunktsatz und die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Zur Erinnerung:

In Bemerkung 9.9 hatten wir jeder $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel φ eine natürliche Zahl $n_\varphi := [\langle\varphi\rangle]_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ zugeordnet (die so genannte "Gödelnummer" von φ).

Satz 10.13 (Der Fixpunktsatz)

Sei T eine σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.
Dann gibt es für jede $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(y)$ einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ so dass gilt:

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})\right)$$

(D.h.: Für jede Formel $\varphi(y)$ gibt es eine nat. Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einen Satz χ, s.d. gilt:
- n ist die Gödelnummer von χ, und
- in jedem Modell $\mathfrak{A}$ von T gibt die Formel $\varphi(\underline{n})$ an, ob der Satz χ erfüllt ist oder nicht).

Beachte: Anschaulich besagt χ: "Die Eigenschaft φ trifft für mich zu"

Beweis:

Betrachte die folgendermaßen definierte Funktion $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$: F.a. $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(m_1, m_2) := \begin{cases} n_{\psi(\underline{m_2})}, & \text{falls es eine } FO[\sigma_{Ar}]\text{-Formel } \psi(x) \text{ gibt, so dass } m_1 \text{ die Gödelnummer der Formel } \psi(x) \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte: f ist berechenbar (da unsere Kodierung die Annahme 9.1 erfüllt).

Satz 10.11 $\Longrightarrow$ f ist in Q repräsentierbar.
Wegen $Q \subseteq T$ ist f daher auch in T repräsentierbar, etwa durch eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\xi_f(x_1, x_2, y)$.

Beachte: Ist $m \in \mathbb{N}$ die Gödelnr. einer Formel $\psi(x)$, so gilt:
$f(m,m)$ ist die Gödelnr. der Formel $\psi(\underline{m})$.

Betrachte nun im Speziellen die Formel

$$\boxed{\psi(x) := \forall y\, \big(\xi_f(x,x,y) \to \varphi(y) \big)}.$$

Sei $\boxed{m \text{ die Gödelnr. der Formel } \psi(x)}$.

Daher gilt: Der Satz $\boxed{\chi := \psi(\underline{m})}$ formalisiert

die Aussage: Beachte: • $\chi = \forall y\,(\xi_f(\underline{m},\underline{m},y) \to \varphi(y))$
• $f(m,m) = n_\chi$

"Die Formel $\varphi(y)$ ist erfüllt, wenn Variable y mit der Gödelnr. der Formel χ belegt wird".

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi})).$$

Dazu gehen wir in 3 Schritten vor.

Behauptung 1: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$

Beweis: Wir wissen:

$$f(m,m) = n_\chi.$$

Da die Formel ξ_f die Funktion f in T repräsentiert gilt: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$ $\square_{\text{Beh 1}}$

Behauptung 2: $T \models (\chi \to \varphi(\underline{n_\chi}))$

Beweis: Gemäß Beh 1 gilt: $T \models \xi_f(\underline{m}, \underline{m}, \underline{n_\chi})$.

Gemäß der Wahl der Formel χ gilt außerdem:

$$T \cup \{\chi\} \models \left(\xi_f(\underline{m},\underline{m},\underline{n_\chi}) \to \varphi(\underline{n_\chi})\right).$$

Somit folgt:

$$T \cup \{\chi\} \models \varphi(\underline{n_\chi}), \quad \text{d.h.}$$

$$T \models (\chi \to \varphi(\underline{n_\chi})).$$

$\square_{\text{Beh 2}}$

[Behauptung 3: $T \models (\varphi(\underline{n_\chi}) \to \chi)$

Beweis: Wegen Beh 1 und da ξ_f die Funktion f in T repräsentiert

$$T \models \forall y \left(\xi_f(\underline{m},\underline{m},y) \to y = \underline{n_\chi}\right).$$

Daraus folgt:

$$T \cup \{\varphi(\underline{n_\chi})\} \models \underbrace{\forall y \left(\xi_f(\underline{m},\underline{m},y) \to \varphi(y)\right)}_{\overset{=}{\text{Def}}\ \chi}$$

Somit gilt: $T \cup \{\varphi(\underline{n_\chi})\} \models \chi$, d.h. $T \models (\varphi(\underline{n_\chi}) \to \chi)$.

$\square_{\text{Beh3}}$

Aus Beh. 2 und Beh. 3 folgt, dass

$$T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}))$$

$\square_{\text{Satz 10.13.}}$

Als einfache Folgerung des Fixpunktsatzes erhalten wir folgendes:

Satz 10.14 ("Unmöglichkeit der Selbstrepräsentierbarkeit")

Eine widerspruchsfreie Theorie, die Q erweitert, ist nicht in sich selbst repräsentierbar.

Präzise:

Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist die Relation

$$R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \} \subseteq \mathbb{N}$$

(d.h. die Menge aller Gödelnummern von Sätzen in T) nicht in T repräsentierbar.

Beweis: Durch Widerspruch.

Angenommen, $\psi(y)$ ist eine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel, die die Relation $R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \}$ in T repräsentiert.

Sei $\varphi(y) := \neg\psi(y)$.

Gemäß Fixpunktsatz (Satz 10.13) gibt es einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ s.d. $T \models (\chi \leftrightarrow \varphi(\underline{n_\chi}))$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
T \models \chi \quad &\Longleftrightarrow \quad T \models \varphi(n_{\underline{\chi}}) \\
&\underset{\varphi(y) = \neg\psi(y)}{\Longleftrightarrow} \quad T \models \neg\psi(n_{\underline{\chi}}) \\
&\underset{\substack{\psi(y) \text{ repr. } R_T \\ \text{in } T}}{\Longleftrightarrow} \quad n_\chi \notin R_T \\
&\underset{R_T \overset{\text{Def}}{=} \{n_\xi : \xi \in T\}}{\Longleftrightarrow} \quad \chi \notin T \\
&\underset{T \text{ ist eine Theorie}}{\Longleftrightarrow} \quad T \not\models \chi
\end{aligned}
$$

↯ Widerspruch.

□ Satz 10.14

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 10.14 (für $T := Th(\mathcal{N})$) erhalten wir den folgenden Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der "Wahrheit".

(Einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz ξ bezeichnen wir hierbei als "<u>wahr</u>", wenn er vom Standardmodell der Arithmetik $(\mathcal{N})$ erfüllt wird.)

Satz 10.15 (Der Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit)

Die Menge aller "wahren" arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch definierbar.

Präzise:
Es gibt keine $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(y)$, so dass für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze ξ gilt:

$$\mathcal{N} \models \varphi(\underline{n_\xi}) \iff \mathcal{N} \models \xi .$$

Beweis: Folgt direkt aus Satz 10.14 mit $T := Th(\mathcal{N})$. $\square$

Als weitere Folgerung aus Satz 10.14 erhalten wir folgendes:

Satz 10.16 (Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe)
Jede widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unentscheidbar.

Insbesondere ist Q selbst unentscheidbar (aber rekursiv aufzählbar, da endlich axiomatisiert).

Beweis:

Sei T eine widerspruchsfreie σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Angenommen, T ist entscheidbar, d.h. die Relation

$$R_T := \{ n_\xi : \xi \in T \} \subseteq \mathbb{N}$$

ist entscheidbar.

Gemäß Satz 10.11 ist R_T dann in Q repräsentierbar.

Wegen $Q \subseteq T$ ist R_T dann auch in T repräsentierbar.

$\lightning$ Widerspruch zu Satz 10.14.

$\square$ Satz 10.16

~~Zur Erinnerung:~~

~~Aus Korollar 9.3 wissen wir, dass die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze rekursiv aufzählbar ist.~~

und Korollar 9.3)

Als einfache Folgerung aus Satz 10.16 erhalten wir:

Unentscheidbarkeit von Q

Satz 10.17

Die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze ist rekursiv aufzählbar, aber <u>nicht</u> entscheidbar.

<u>Beweis:</u> Die rekursive Aufzählbarkeit folgt aus Kor. 9.3.

Angenommen, die Menge aller allgemeingültigen $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze wäre entscheidbar.

Wir zeigen, dass dann auch Q entscheidbar wäre und erhalten damit einen Widerspruch zu Satz 10.16

Sei $\varphi_Q := \bigwedge_{i=1}^{9} \varphi_{(Qi)}$ die Konjunktion der $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze $\varphi_{(Q1)}, \dots, \varphi_{(Q9)}$, die gemäß Def. 10.3 die minimale Arithmetik Q axiomatisieren.

Dann gilt für jeden $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Satz ξ:

$$\xi \in Q \iff \psi_Q \models \xi$$

$$\iff (\psi_Q \to \xi) \text{ ist allgemeingültig.}$$

Somit wäre Q entscheidbar: Indem man bei Eingabe von ξ den Satz $(\psi_Q \to \xi)$ bildet und testet, ob $(\psi_Q \to \xi)$ allgemeingültig ist, kann man testen, ob $\xi \in Q$ ist.

$\lightning$ Widerspruch zu Satz 10.16

$\square$ Satz 10.17

Folgerung 10.17':

Die Menge aller erfüllbaren $\mathrm{FO}[\sigma_{Ar}]$-Sätze ist nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis: Übung!

10.4 Gödels erster Unvollständigkeitssatz

Gödels erster Unvollständigkeitssatz folgt unmittelbar aus Satz 10.16 und Korollar 10.2 (b) (Entscheidbarkeit vollständiger, effektiv axiomatisierbarer Theorien):

Satz 10.18 (Gödels erster Unvollständigkeitssatz)

Jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ ist unvollständig.

Beweis:

Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Angenommen, T ist vollständig.

Gemäß Korollar 10.2 (b) ist T dann entscheidbar.

↯ Widerspruch zu Satz 10.16.

$\square$ Satz 10.18

Bzgl. des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes können wir sogar explizit eine Formel φ_T angeben, die unabhängig von T ist, d.h. für die weder $T \models \varphi_T$ noch $T \models \neg\varphi_T$ gilt.

Um eine solche Formel φ_T zu konstruieren, betrachten wir im Folgenden Beweise im Sequenzenkalkül und stellen fest, dass die Beweisbarkeit einer Aussage durch eine Σ_1-Formel definiert werden kann:

<u>Lemma 10.19</u> (Existenz von "Beweisbarkeitsformeln")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gibt es eine Σ_1-Formel

$$\mathrm{Bew}_T(x)$$

so dass für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ gilt:

$$T \models \varphi \iff T \vdash_S \varphi \iff \mathbb{N} \models \mathrm{Bew}_T[n_\varphi].$$

<u>Beweis:</u> T effektiv axiomatisierbar $\overset{\text{Kor. 10.2}}{\Longrightarrow}$ T r.e.

$\Longrightarrow \{ n_\varphi : \varphi\ FO[\sigma_{Ar}]\text{-Satz mit } T \vdash_S \varphi \}$ r.e.

$\underset{\text{Satz 9.21}}{\Longrightarrow}$ $\{ n_\varphi : \varphi$ FO$[\sigma_{Ar}]$-Satz mit $T \vdash_g \varphi \}$ ist

Σ_1-definierbar,

d.h. es gibt eine Σ_1-Formel $Bew_T(x)$ s.d. f.a.

FO$[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ gilt:

$$\mathcal{N} \models Bew_T[n_\varphi] \iff T \vdash_g \varphi \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} T \models \varphi.$$

$\square_{\text{Lemma 10.19}}$

Notation 10.20 ("Beweisbarkeitsformeln")

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T sei im Folgenden $Bew_T(x)$ eine fest gewählte Σ_1-Formel s.d. f.a. FO$[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ gilt:

$$T \vdash_g \varphi \iff \mathcal{N} \models Bew_T[n_\varphi].$$

Aus Lemma 10.18 und dem Σ_1-Transfersatz (Satz 10.5) folgt unmittelbar:

Korollar 10.21

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie. Dann gilt für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ:

(a) $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff Q \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) Wenn $Q \subseteq T$, dann gilt:
Falls $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$.

Beweis: (b) folgt direkt aus (a).

Zu (a): $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$

$\overset{\text{Notation 10.20}}{\iff}$ $\mathbb{N} \models Bew_T[n_\varphi]$

$\overset{\Sigma_1\text{-Transfersatz}}{\iff}$ $Q \models Bew_T(\underline{n_\varphi})$

$\overset{\text{Vollständigkeitssatz}}{\iff}$ $Q \vdash_{\mathfrak{S}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$ $\square$

Lemma 10.22 (Existenz von "Gödelsätzen")

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ mit

$$T \models \left(\chi \leftrightarrow \neg Bew_T(\underline{n_\chi})\right) \qquad \underline{(*)}$$

(Anschaulich besagt χ folgendes: "Ich bin nicht aus T beweisbar").

Beweis: Folgt direkt aus dem Fixpunktsatz (Satz 10.13) für $\varphi(y) := \neg Bew_T(y)$

$\square$

Notation 10.23

Ein Satz χ, der die Eigenschaft (*) besitzt, heißt **Gödelsatz für T**.

Gödelsätze liefern konkrete Beispiele für die Unvollständigkeit von T (vgl. Gödels ersten Unvollständigkeitssatz):

Satz 10.24 (Präzisierung von Gödels erstem Unvollständigkeitssatz)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T \subseteq Th(\mathcal{N})$, und sei χ ein Gödelsatz für T.

Dann ist unabhängig von T, d.h. es gilt weder $T \models \chi$ noch $T \models \neg\chi$.

Beweis: Beachte: $T \subseteq Th(\mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{N} \models T \Rightarrow$ T ist erfüllbar, also widerspruchsfrei.

Schritt 1: Angenommen, $T \vDash \mathcal{X}$.

Gemäß der Definition des Begriffs "Gödelsatz" gilt dann auch: $T \vDash \neg Bew_T(\underline{n_\mathcal{X}})$

Wegen $\mathcal{N} \vDash T$ gilt dann: $\mathcal{N} \vDash \neg Bew_T(\underline{n_\mathcal{X}})$,

d.h. $\mathcal{N} \nvDash Bew_T[n_\mathcal{X}]$.

Gemäß Notation 10.20 also $T \nvdash_g \mathcal{X}$, d.h. $T \nvDash \mathcal{X}$

↯ Wid.

Schritt 2: Angenommen, $T \vDash \neg\mathcal{X}$

Gemäß der Definition des Begriffs "Gödelsatz" gilt dann auch: $T \vDash Bew_T(\underline{n_\mathcal{X}})$

Wegen $\mathcal{N} \vDash T$ gilt dann: $\mathcal{N} \vDash Bew_T[n_\mathcal{X}]$.

Gemäß Notation 10.20 also $T \vdash_g \mathcal{X}$, d.h. $T \vDash \mathcal{X}$ ↯ Wid.

□

10.5 Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz

Das Hilbertsche Programm

Ziel: Rechtfertigung der
Korrektheit der modernen abstrakten Mathematik
(mit all ihren Beweistechniken)

Methode: durch eine Reduktion auf eine
"unanfechtbare" finite Mathematik

Etwas genauer:

- "Abstrakte Mathematik":
  - beliebige Aussagen
  - abstrakte Beweistechniken
  - Formalisierung: eine beliebige Theorie A

- "Finite Mathematik":
  - nur "reale Aussagen", d.h. Aussagen der Form
    $\forall x\, \varphi(x)$ mit $\varphi(x) \in \Delta_0$
  - "finite" Beweismethoden (etwa: Beweise im Sequenzenkalkül)
  - Formalisierung: eine geeignete Theorie F mit
    $Q \subseteq F \subseteq A$
  - Notation: Eine "reale Aussage" $\forall x\, \varphi(x)$ heißt wahr, wenn sie im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik gilt.

(Zur Erinnerung: Gemäß Vollständigkeitssatz gilt
f.a. $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ und f.a. $\varphi \in FO[\sigma]$:

$$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$$

d.h. im Sequenzenkalkül lassen sich genau diejenigen Aussagen beweisen, die semantisch folgen.)

- Möglicherweise kann A eine Theorie über einer größeren Signatur σ als σ_{Ar} sein, damit $FO[\sigma]$-Formeln auch über andere mathematische Objekte als natürliche Zahlen sprechen können.

- Beachte: Formale Beweise in der Theorie A sind "finite Objekte", über die man mittels einer geeigneten Kodierung in der Theorie F sprechen kann.

Ziele von Hilberts Programm:

Ziel 1: Finiter Beweis der Korrektheit der abstrakten Mathematik
(Formal: ein Beweis in F, dass alle in A beweisbaren realen Aussagen wahr sind)

Ziel 2: Finiter Beweis der Widerspruchsfreiheit der abstrakten Mathematik. (Formal: ein Beweis in F, dass A widerspruchsfrei ist)

Behauptung: Die beiden Ziele sind äquivalent,
d.h.: A ist widerspruchsfrei $\Longleftrightarrow$ alle in A beweisbaren realen Aussagen sind wahr.

Beweis:

"$\Longleftarrow$":

Angenommen, A wäre nicht widerspruchsfrei. (also nicht erfüllbar)
Dann sind alle Aussagen aus A beweisbar.
Somit gibt es reale Aussagen, die in A beweisbar sind, aber nicht wahr sind.

"$\Longrightarrow$":

A sei widerspruchsfrei.
Angenommen, es gibt eine reale Aussage der Form $\forall x\, \psi(x)$ (mit $\psi(x) \in \Delta_0$) s.d.

$$A \models \forall x\, \psi(x),$$

die nicht wahr ist, d.h. $\mathbb{N} \not\models \forall x\, \psi(x)$.

Dann ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} \models \neg\psi(\underline{n})$.

Wegen $\neg\psi(x) \in \Delta_0$ und $Q \subseteq A$ liefert der Σ_1-Transfersatz (Satz 10.5), dass $A \models \neg\psi(\underline{n})$.
Wegen $A \models \forall x\, \psi(x)$, gilt aber auch: $A \models \psi(\underline{n})$.

↯ Widerspruch zu "A ist widerspruchsfrei".

$\square$

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, dass Ziel 2 nicht erreichbar ist, d.h. dass es keinen Beweis in F gibt, der die Widerspruchsfreiheit von A nachweist.

Um dies zu beweisen, nutzen wir die Beweisbarkeitsformel $Bew_T(x)$ und konstruieren eine Formel $Wfrei_T$, die besagt, dass die Theorie T widerspruchsfrei ist:

~~Unter Nutzung der Beweisbarkeitsformel $Bew_T(x)$ kann man leicht eine Formel konstruieren, die besagt, dass die Theorie T widerspruchsfrei ist:~~

<u>Definition 10.25</u> (Konsistenzsatz $Wfrei_T$)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $Q \subseteq T$.

Der <u>Konsistenzsatz für T</u> ist der $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz

$$Wfrei_T := \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$$

<u>Lemma 10.26</u>

Für jede effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $Q \subseteq T$ gilt

$$T \text{ ist widerspruchsfrei} \iff \mathcal{N} \models Wfrei_T.$$

<u>Beweis:</u> T widerspruchsfrei

$\iff$ T nicht widerspruchsvoll

$\iff$ $T \nvdash_g 0=1$ (da $T \supseteq Q$ und $Q \vdash_g \neg 0=1$)

$\iff$ $\mathcal{N} \not\models Bew_T(\underline{n_{0=1}})$

$\iff$ $\mathcal{N} \models \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$. $\square$

Bemerkung:

Man beachte, dass der Satz $Wfrei_T$ äquivalent zu einem Satz der Form $\forall x\, \varphi(x)$ (mit $\varphi(x) \in \Delta_0$) ist.

Somit ist der Satz $Wfrei_T$ eine "reale Aussage" im Sinne des Hilbertschen Programms.

Gödels 2. Unvollständigkeitssatz besagt, dass $T \nvdash_g Wfrei_T$, sofern T eine effektiv axiomatisierbare, widerspruchsfreie Erweiterung der so genannten Peano-Arithmetik ist:

Definition 10.27 (Die Peano-Arithmetik PA)

Die Peano-Arithmetik PA ist die σ_{Ar}-Theorie, die von den Axiomen $\psi_{(Q1)}, \dots, \psi_{(Q9)}$ der Theorie Q sowie von den folgenden Induktionsaxiomen $\psi_{(Ind,\varphi)}$ axiomatisiert wird:

Für jede $FO[\sigma_{Ar}]$-Formel $\varphi(x)$ sei

$$\psi_{(Ind,\varphi)} := \Big(\big(\underbrace{\varphi(\underline{0})}_{\text{"Induktionsanfang"}} \wedge \underbrace{\forall x \big(\varphi(x) \to \varphi(x+1) \big)}_{\text{"Induktionsschritt"}} \big) \to \forall x\, \varphi(x) \Big).$$

<u>Klar:</u>
- $\mathbb{N} \models PA$
- $Q \subseteq PA \subseteq Th(\mathbb{N})$
- PA ist effektiv axiomatisierbar.

Wir können nun Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz formulieren:

<u>Satz 10.28</u> (Gödels zweiter Unvollständigkeitssatz)
Für jede widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie T mit $PA \subseteq T$ gilt:

$$T \not\vdash_{\mathfrak{S}} \text{Wfrei}_T$$

(d.h. die Widerspruchsfreiheit von T kann nicht mit den in T verfügbaren Mitteln bewiesen werden).

Satz 10.28 lässt sich sehr leicht beweisen, wenn man den folgenden Satz von Löb verwendet:

Satz 10.29 (Der Satz von Löb)

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$.
Dann gilt für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ:

$$T \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi \right).$$

Beachte: • Die Richtung "$\Rightarrow$" gilt trivialerweise. Hinweise zum Beweis der Richtung "$\Leftarrow$" werden gleich noch gegeben.

• Aus Korollar 10.20 wissen wir bereits, dass gilt:
Falls $T \vdash_{\mathfrak{G}} \varphi$, so $T \vdash_{\mathfrak{G}} Bew_T(\underline{n_\varphi})$

Beweis von Gödels 2. Unvollständigkeitssatz unter Verwendung des Satzes von Löb:

Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$.

Zu zeigen: $T \nvdash_g Wfrei_T$

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $T \vdash_g Wfrei_T$

Gemäß Definition 10.25 gilt:

$$Wfrei_T \underset{Def}{=} \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$$

Somit gilt:

$T \vdash_g Wfrei_T$

$\Rightarrow$ $T \vdash_g \neg Bew_T(\underline{n_{0=1}})$

$\Rightarrow$ für jeden $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz φ gilt: $T \vdash_g (Bew_T(\underline{n_{0=1}}) \rightarrow \varphi)$

$\Rightarrow$ insbes. gilt für $\varphi := 0=1$:

$$T \vdash_g (Bew_T(\underline{n_{0=1}}) \rightarrow 0=1)$$

$\Rightarrow$ Aus dem Satz von Löb (Satz 9.51) folgt, dass

$$T \vdash_g 0=1$$

Wegen $T \supseteq PA \supseteq Q$ gilt aber: $T \vdash_g \neg 0=1$.

Somit gilt: T ist widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch

$\square$ Satz 10.28

Um den Satz von Löb zu beweisen, verwendet man folgendes Lemma:

Lemma 10.30

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt für alle $FO[\sigma_{Ar}]$-Sätze φ und ψ:

(a) Falls $T \vdash_g \varphi$, so $T \vdash_g \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$.

(b) $T \vdash_g \left(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_{\varphi\to\psi}}) \to \left(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\psi}) \right)\right)$

(c) $T \vdash_g \left(\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi}) \to \mathrm{Bew}_T\left(\underline{n_{\mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})}} \right) \right)$.

(~~hier ohne Beweis~~).

Einige Anmerkungen zu Lemma 10.30:

Aussage (a) haben wir bereits in Korollar 10.21 nachgewiesen.

Die Beweise der Aussagen (b) und (c) sind "inhaltlich" nicht besonders schwierig, aber sehr aufwändig.

Zum besseren Verständnis der Aussage von Lemma 10.30 beachte man, dass Aussage (b) besagt, dass eine

Formalisierung der Modus Ponens Regel

(*) $$T \vdash_y (\varphi \to \psi) \implies (T \vdash_y \varphi \implies T \vdash_y \psi)$$

in der Theorie T beweisbar ist.

Analog besagt Aussage (c), dass eine Formalisierung der Regel

$$T \vdash_y \varphi \implies T \vdash_y \mathrm{Bew}_T(\underline{n_\varphi})$$

(d.h. eine Formalisierung der Aussage (a))

in der Theorie T beweisbar ist.

Die Peano-Arithmetik ist stark genug, um die "normale", elementare Mathematik formal nachzuvollziehen — dazu zählt auch der Inhalt dieser Vorlesung. Insbesondere lässt sich in PA auch der Beweis der Korrektheit der Modus Ponens Regel (*) sowie der Beweis von Aussage (a) (d.h. Korollar 10.21 (b)) in PA formalisieren.

Dies liefert dann die Aussagen (b) und (c) von Lemma 10.30.

(Einen formalen Beweis von Lemma 10.30 werden wir hier nicht geben.)

Unter Verwendung von Lemma 10.30 lässt sich der Satz von Löb (Satz 10.29) folgendermaßen beweisen:

<u>Beweis von Satz 10.29 unter Verwendung von Lemma 10.30</u>

Sei T eine effektiv axiomatisierbare σ_{Ar}-Theorie mit $PA \subseteq T$ und sei φ ein beliebiger $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz.

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi \iff T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi)$

<u>"$\Longrightarrow$"</u>: folgt leicht unter Verwendung des Vollständigkeitssatzes, denn:

$$\begin{aligned} T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi &\Rightarrow T \models \varphi \\ &\Rightarrow \text{f.a. } \psi \text{ gilt: } T \models (\psi \to \varphi) \\ &\Rightarrow \text{insbes. für } \psi := Bew_T(\underline{n_\varphi}) \text{ gilt: } \\ &\qquad T \models (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \\ &\Rightarrow T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi). \end{aligned}$$

<u>"$\Longleftarrow$"</u>: Laut Voraussetzung gilt

$$T \vdash_{\mathfrak{S}} (Bew_T(\underline{n_\varphi}) \to \varphi) \qquad (*)_1$$

Zu zeigen: $T \vdash_{\mathfrak{S}} \varphi$.

Eine Anwendung des Fixpunktsatzes (Satz 10.13) auf die Formel $(Bew_T(y) \to \varphi)$ liefert einen "Fixpunkt" χ, d.h. einen $FO[\sigma_{Ar}]$-Satz χ, s.d.

$$T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(\chi \leftrightarrow (Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)\right) \qquad \circledast_2$$

Somit gilt:

$$T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(\chi \to (Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)\right)$$

$\overset{\text{Lemma 10.30(a)}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_{\mathfrak{G}} Bew_T\left(\underline{n_{(\chi \to (Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi))}}\right)$

$\overset{\text{Lemma 10.30(b) und Vollständigkeitssatz}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(Bew_T(\underline{n_\chi}) \to Bew_T\left(\underline{n_{(Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)}}\right)\right)$

$\overset{\text{Lemma 10.30(b)}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_{\mathfrak{G}} \underbrace{\left(Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \left(Bew_T\left(\underline{n_{Bew_T(\underline{n_\chi})}}\right) \to Bew_T(\underline{n_\varphi})\right)\right)}_{\circledast_3}$

Wegen Lemma 10.30 (c) gilt:

$$T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(Bew_T(\underline{n_\chi}) \to Bew_T\left(\underline{n_{Bew_T(\underline{n_\chi})}}\right)\right)$$

$\overset{\circledast_3 \text{ und Vollst.satz}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_{\mathfrak{G}} \left(Bew_T(\underline{n_\chi}) \to Bew_T(\underline{n_\varphi})\right)$

$\underset{⊛_1}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_y (Bew_T(\underline{n_\chi}) \to \varphi)$ ⊛$_4$

$\underset{⊛_2}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_y \chi$

$\underset{\text{Lemma 10.30(a)}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_y Bew_T(\underline{n_\chi})$ ⊛$_5$

$\underset{⊛_5 \text{ und } ⊛_4 \text{ und Vollst.satz}}{\Longrightarrow}$ $T \vdash_y \varphi$.

□ Satz 10.29.

Abschluss der Vorlesung "Logik in der Informatik"

- Überblick über die in Vorlesung bzw. Übung behandelten Themen

- Hinweise zur Prüfungsvorbereitung

- Ausblick auf das Seminar "Logik in der Informatik" im kommenden Semester

Thema: Definierbarkeit von Sprachen ($L \subseteq \Sigma^*$) durch Formeln der Logik erster Stufe

Material: H. Straubing: "Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity", Birkhäuser, 1994.