7 Der Vollständigkeitssatz

Ziel dieses Kapitels ist, ein “formales Beweissystem”, den so genannten **Sequenzenkalkül**, kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. Insbesondere folgt daraus dann, dass das Problem

ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM DER LOGIK ERSTER STUFE	
Eingabe:	Eine FO[σ]-Formel φ
Frage:	Gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$?

semi-entscheidbar ist.

7.1 Beweiskalküle

Definition 7.1 (Ableitungsregel; Kalkül)**.**
Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine **Ableitungsregel über** M hat die Form

$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Ableitungsregel über M

(b) Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die **Voraussetzungen** der Regel $\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$ und b als die **Konsequenz**.
Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als **Axiome**.

Voraussetzungen

Konsequenz

Axiome

(c) Ein **Kalkül** über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Kalkül

Definition 7.2 (Ableitbare Elemente)**.**
Sei κ ein Kalkül über einer Menge M.

(a) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M. Die Menge $A_{\kappa,V} \subseteq M$ aller **aus** V **in** κ **ableitbaren Elemente** ist rekursiv wie folgt definiert:

$A_{\kappa,V}$

aus V in κ ableitbare Elemente

(I) Für alle $b \in V$ ist $b \in A_{\kappa,V}$.

(II) Für alle Axiome $\overline{\;b\;}$ in κ ist $b \in A_{\kappa,V}$.

(III) Für alle Ableitungsregeln $\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$ in κ gilt: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in A_{\kappa,V}$, so auch $b \in A_{\kappa,V}$.

$A_{\kappa,V}$ ist also die bezüglich „$\subseteq$“ kleinste Teilmenge von M, die die Abschlusseigenschaften (I), (II) und (III) besitzt.

Voraussetzungen

Die Menge V wird auch **Menge der Voraussetzungen** genannt.

A_κ

In κ ableitbare Elemente

(b) Die Menge $A_\kappa := A_{\kappa,\emptyset}$ ist die Menge aller **in** κ **ableitbaren Elemente**

Kalküle sind also einfach eine andere Schreibweise für rekursive Definitionen.

Definition 7.3 (Ableitungen)**.**
Sei κ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

Ableitung von a aus V in κ

(a) Eine **Ableitung von** a **aus** V **in** κ ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \in \mathbb{N}_{>0}, a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\overline{a_i}$ ist ein Axiom in κ oder
- es gibt in κ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array}}{a_i}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

Ableitung von a in κ

(b) Eine **Ableitung von** a **in** κ ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in κ.

Beobachtung 7.4. Offensichtlich gilt:
a genau dann aus V in κ ableitbar (gemäß Definition 7.2), wenn
es eine Ableitung von a aus V in κ gibt (gemäß Definition 7.3).

7.2 Ein Sequenzenkalkül

In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur (im Sinne von Definition 1.1).

Notation 7.5.

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer FO[σ]-Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen Mengen von FO[σ]-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen **endliche** Mengen von FO[σ]-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup\limits_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}\big(\Phi \cup \{\varphi\}\big)$.

$L \subseteq_e M$

- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine **endliche** Teilmenge von M ist.

Definition 7.6 (Sequenzen)**.**

Sequenz

$\Gamma \vdash \psi$

(a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi,$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

Antezedens

Sukzedens

Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.: M_S

$$M_S \;:=\; \big\{\Gamma \vdash \psi \;:\; \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]\big\}.$$

Notation 7.7.

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

In Definition 2.1 hatten wir bereits festgelegt, wann eine FO[σ]-Formel ψ aus einer Formel φ folgt:

$$\varphi \models \psi \quad \underset{\text{Def. 2.1}}{:\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l}\text{für alle zu } \varphi \text{ und } \psi \text{ passenden } \sigma\text{-Interpretationen } \mathcal{I} \text{ gilt:}\\ \text{Falls } \mathcal{I} \models \varphi, \text{ so auch } \mathcal{I} \models \psi.\end{array}$$

Die folgende Definition legt (auf die naheliegende Weise) fest, wann eine Formel ψ aus einer ganzen Menge Φ von Formeln folgt:

Definition 7.8.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
ψ **folgt aus** Φ (bzw. Φ **impliziert** ψ), kurz $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls für alle $\varphi \in \Phi$ gilt $\mathcal{I} \models \Phi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

ψ folgt aus Φ
Φ impliziert ψ
$\Phi \models \psi$

Notation 7.9.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

- Wir sagen $\mathcal{I}$ **passt zu** Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt. $\mathcal{I}$ passt zu Φ
- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ erfüllt Φ) $\;:\Longleftrightarrow\;$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$. $\mathcal{I} \models \Phi$
$\mathcal{I}$ erfüllt Φ

Definition 7.10 (Korrekte Sequenzen und Sequenzenregeln)**.**

(a) Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt **korrekt**, wenn gilt: $\Gamma \models \psi$. korrekt

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1\\ \vdots\\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **korrekt**, wenn folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Gamma_k \vdash \varphi_k$ korrekt.

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen ein, den sogenannten **Sequenzenkalkül** $\mathscr{S}$. Im Verlauf von Kapitel 7 werden wir sehen, dass folgendes gilt:

Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$

(a) Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathscr{S}$ besteht, sind korrekt. Daraus folgt dann, dass auch alle in $\mathscr{S}$ ableitbaren Sequenzen korrekt sind.

(b) Ist $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Korrektheit
Vollständigkeit

Die Eigenschaften (a) und (b) werden **Korrektheit** bzw. **Vollständigkeit** des Kalküls $\mathscr{S}$ genannt. Der Einfachheit halber werden wir nur Formeln betrachten, in denen keins der Symbole $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt (vgl. Beobachtung 2.2).

Definition 7.11 (Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$)**.**
Der **Sequenzekalkül** $\mathscr{S}$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht — für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathrm{Var}$:

Grundregeln

(V)

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

(E)

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Aussagenlogische Regeln

(FU)

- Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

(W)

- Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad \text{(für alle } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

($\wedge$A$_1$)

($\wedge$A$_2$)

- $\wedge$-Einführung im Antezedens ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$):

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

($\wedge$S)

- $\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge$S):

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

($\vee$A)

- $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A):

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

($\vee$S$_1$)

($\vee$S$_2$)

- $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

Quantorenregeln

($\forall$A)

- $\forall$-Einführung im Antezedens ($\forall$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedens ($\forall$S): ($\forall$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

- $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A): ($\exists$A)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

- $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S): ($\exists$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

Gleichheitsregeln

- Reflexivität der Gleichheit (G): (G)

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

- Substitutionsregel (S): (S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \ \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Im Folgenden geben wir zwei Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül.

Beispiel 7.12.

(a) Für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathscr{S}$:

(1)	φ	$\vdash$	φ	(V)
(2)	φ	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_1$) auf (1) angewendet
(3)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(4)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee$S$_2$) auf (3) angewendet
(5)		$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf (2), (4) angewendet.

(b) $R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x) \ \vdash R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ ist ableitbar in $\mathscr{S}$:

(1)	$R\big(f(x)\big)$	$\vdash$	$R\big(f(x)\big)$	(V)
(2)	$R\big(f(x)\big), x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	(S) auf (1) mit $t{=}x$, $u{=}f(x)$
(3)	$R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	($\forall$A) auf (2) mit $t{=}x$.

Der folgende Satz bestätigt Punkt (a) der auf Seite 93 beschriebenen Agenda:

Satz 7.13 (Korrekheit des Sequenzenkalküls)**.**
Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathscr{S}$ besteht, sind korrekt; und jede in $\mathscr{S}$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass jede Ableitungsregel von $\mathscr{S}$ korrekt ist, d.h. es gilt: Wenn die Voraussetzungen der Regel korrekt sind, dann ist auch die Konsequenz korrekt. Die Korrektheit aller in $\mathscr{S}$ ableitbaren Sequenzen folgt dann leicht per Induktion nach der Länge von Ableitungen.

(V): $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$

Offensichtlich gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$. Daher ist die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ korrekt.

(G): $\dfrac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$

Offensichtlich ist die Formel $t{=}t$ allgemeingültig. Daher gilt für alle Γ, dass $\Gamma \models t{=}t$. Somit ist die Sequenz $G \models t{=}t$ korrekt.

(E): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi}$ falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi$. Sei $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Zu zeigen: $\Gamma' \models \varphi$.

Beweis:
Sei $\mathcal{I}$ eine zu Γ' und φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $\Gamma \models \varphi$ folgt dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Somit gilt: $\Gamma' \models \varphi$, d.h. $\Gamma' \vdash \varphi$ ist korrekt.

(FU): $\dfrac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$

Annahme: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ist korrekt und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

Beweis:
Laut Annahme gilt $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.
Sei $\mathcal{I}$ eine zu $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \{\varphi\}$ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

Fall 1: $\mathcal{I} \models \psi$:

Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Fall 2: $\mathcal{I} \models \neg\psi$:

Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

(W): $\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$ (für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$)

Annahme: $\Gamma \vdash \psi$ ist korrekt und $\Gamma \vdash \neg\psi$ ist korrekt.

Zu zeigen: Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass keine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ geben kann, die Γ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, das $\Gamma \models \varphi$, d.h. dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Angenommen, $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ist eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.
Offensichtlicherweise kann der Definitionsbereich von β so erweitert werden, dass $\mathcal{I}$ auch zur Formel ψ passt.
Laut Annahme gilt $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$. Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ muss daher sowohl $\mathcal{I} \models \psi$, als auch $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gelten. Dies ist aber nicht möglich! $\lightning$

($\wedge$A$_1$): $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$

Annahme: $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ ist korrekt.

Beweis: Offensichtlich!

($\wedge A_2$), ($\wedge$S), ($\vee$A), ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$), ($\forall$A), ($\exists$S), (S): ähnlich leicht!

($\forall$S): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$

Beweis:

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$.

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ ist korrekt.

Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma für alle $a \in A$: $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$.
Gemäß Annahme gilt: $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$. Somit gilt für alle $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$.
D.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$.
Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x\, \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$ gilt gemäß Substitutionslemma, dass $\mathcal{I} \models \forall x\varphi$.
Somit gilt: $\Gamma \models \forall x\varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ ist korrekt.

($\exists$A): $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \psi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$

Beweis: Analog; Details: Übung.

Dies schließt den Beweis von Satz 7.13 ab.

$\square_{\text{Satz 7.13}}$

Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ als „formales Beweissystem", mit dem man mechanisch den Nachweis erbringen kann, dass für eine Formelmenge Φ und eine Formel φ gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Definition 7.14 (Beweisbarkeit)**.**
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist. beweisbar $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$
Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathscr{S}$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$. Beweis

Aus Satz 7.13 folgt direkt:

Korollar 7.15.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$, so $\Phi \models \varphi$.
D.h.: Falls φ aus Φ beweisbar ist, so folgt φ semantisch aus Φ.

Unser Ziel im Rest von Kapitel 7 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 7.15 gilt, d.h.: Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Vollständigkeitssatz

Dies ist die Aussage des **Vollständigkeitssatz**es. Man beachte, dass die Richtung „$\Longleftarrow$“ gerade Punkt (b) der auf Seite 94 beschriebenen Agenda darstellt.

7.3 Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

Definition 7.16.
Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k \\ \hline \Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1} \end{array}$$

ableitbar (in $\mathscr{S}$)

heißt **ableitbar (in $\mathscr{S}$)**, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \big\{\Gamma_i \vdash \varphi_i \ : \ i \in \{1, \ldots, k\}\big\}$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Lemma 7.17.
Sei $\mathscr{S}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathscr{S}$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln. Dann ist eine Sequenz S genau dann in $\mathscr{S}'$ ableitbar, wenn sie in $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Beweis: Übung (vgl. Aufgabe 7.1).

□

Im Folgenden wird eine Liste von ableitbaren Sequenzenregeln zusammengestellt, die für den Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr nützlich sein werden.

Lemma 7.18 (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

Kettenschlussregel (KS)

- *Kettenschlussregel (KS):*

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi \\ \hline \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

Disjunktiver Syllogismus (DS)

- *Disjunktiver Syllogismus (DS):*

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \psi) \\ \hline \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

- *Modus Ponens*[1] *(MP):*

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi)\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}$$

- *Kontrapositionsregeln (KP):*

Kontrapositionsregeln (KP)

  – $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$$

  – $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$$

  – $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$

  – $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

Beweis:

(KS):

(1)	Γ	$\vdash$	φ	(Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash$	ψ	(FU) auf (2), (5)

(DS):

(1)	Γ	$\vdash$	$(\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(Voraussetzung)
(3)	Γ, φ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(E) auf (2)
(4)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(5)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash$	ψ	(V)
(7)	$\Gamma, (\varphi \vee \psi)$	$\vdash$	ψ	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash$	ψ	(KS) auf (1), (7)

[1] Wir betrachten hier $(\varphi \to \psi)$ als "abkürzende Schreibweise" für die Formel $(\neg\varphi \vee \psi)$.

(MP):

(1)	Γ	$\vdash$	$(\neg\,\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung)
				Beachte: $(\varphi \to \psi)$ ist eine Abkürzung für $(\neg\,\varphi \vee \psi)$
(2)	Γ	$\vdash$	φ	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\,\varphi$	$\vdash$	φ	(E) auf (2)
(4)	$\Gamma, \neg\,\varphi$	$\vdash$	$\neg\,\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\,\varphi$	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash$	ψ	(V)
(7)	$\Gamma, (\neg\,\varphi \vee \psi)$	$\vdash$	ψ	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash$	ψ	(KS) auf (1), (7)

(KP):

(1)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \neg\,\psi, \varphi$	$\vdash$	ψ	(E) auf (1)
(3)	$\Gamma, \neg\,\psi$	$\vdash$	$\neg\,\psi$	(V)
(4)	$\Gamma, \neg\,\psi, \varphi$	$\vdash$	$\neg\,\psi$	(E) auf (3)
(5)	$\Gamma, \neg\,\psi, \varphi$	$\vdash$	$\neg\,\varphi$	(W) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, \neg\,\psi, \neg\,\varphi$	$\vdash$	$\neg\,\varphi$	(V)
(7)	$\Gamma, \neg\,\psi$	$\vdash$	$\neg\,\varphi$	(FU) auf (5),(6)

Die anderen Kontrapositionsregeln können analog abgeleitet werden.

$\square$

Lemma 7.19 (Ableitbare Quantorenregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$*, alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $x \in \mathit{Var}$*.*

(QA) *Quantorenaustauschregeln (QA):*

1) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\,\forall x\;\varphi}{\Gamma \vdash \exists x\;\neg\,\varphi}$$

2) $$\frac{\Gamma \vdash \exists x\;\neg\,\varphi}{\Gamma \vdash \neg\,\forall x\;\varphi}$$

3) $$\frac{\Gamma \vdash \neg\,\exists x\;\varphi}{\Gamma \vdash \forall x\;\neg\,\varphi}$$

4) $$\frac{\Gamma \vdash \forall x\;\neg\,\varphi}{\Gamma \vdash \neg\,\exists x\;\varphi}$$

Beweis:

Zu 1):

(1)	Γ	$\vdash \neg\forall x\,\varphi$	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash \neg\varphi\frac{y}{x}$	(V) ; sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$
(3)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash \exists x\,\neg\varphi$	($\exists$S) auf (2) mit $t{=}y$
(4)	$\Gamma, \neg\exists x\,\neg\varphi$	$\vdash \varphi\frac{y}{x}$	(KP) auf (3)
(5)	$\Gamma, \neg\exists x\,\neg\varphi$	$\vdash \forall x\,\varphi$	($\forall$S) auf (4)
(6)	$\Gamma, \neg\forall x\,\varphi$	$\vdash \exists x\,\neg\varphi$	(KP) auf (5)
(7)	Γ	$\vdash \exists x\,\neg\varphi$	(KS) auf (1),(6)

Zu 2):

(1)	Γ	$\vdash \exists x\,\neg\varphi$	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \varphi\frac{y}{x}$	$\vdash \varphi\frac{y}{x}$	(V) ; sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$
(3)	$\Gamma, \forall x\varphi$	$\vdash \varphi\frac{y}{x}$	($\forall$A)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash \neg\forall x\,\varphi$	(KP) auf (3)
(5)	$\Gamma, \exists x\,\neg\varphi$	$\vdash \neg\forall x\,\varphi$	($\exists$A) auf (4)
(6)	Γ	$\vdash \neg\forall x\,\varphi$	(KS) auf (1),(5)

Zu 3) und 4): analog.

$\square$

Lemma 7.20 (Ableitbare Gleichheitsregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar (für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, für alle $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \dots \in T_\sigma$):

- *Symmetrie der Gleichheit (SG):* (SG)

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

- *Transitivität der Gleichheit (TG):* (TG)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = t_2\\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

- *Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:* (VR)

  (VR): Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(R)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \dots, t_r)\\ \Gamma \vdash t_1 = u_1\\ \quad\vdots\\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \dots, u_r)}$$

  (VF): Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(f)$: (VF)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1 \\ \quad\vdots \\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \ldots, t_r) = f(u_1, \ldots, u_r)}$$

Beweis:

- (SG):

(1)	Γ	$\vdash$	$t = u$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t = t$	(G)
(3)	$\Gamma, t = u$	$\vdash$	$u = t$	(S) auf (2) mit $\varphi :=\ x = t$
(4)	Γ	$\vdash$	$u = t$	(KS) auf (1),(3)

- (TG):

(1)	Γ	$\vdash$	$t_1 = t_2$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_2 = t_3$	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, t_2 = t_3$	$\vdash$	$t_1 = t_3$	(S) auf (1) mit $\varphi :=\ t_1 = x$, $t := t_2$, $u := t_3$
(4)	Γ	$\vdash$	$t_1 = t_3$	(KS) auf (2),(3)

- (VR): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$R(t_1, t_2)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(S) auf (1) mit $\varphi := R(x, t_2)$, $t := t_1$, $u := u_1$
(5)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(KS) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi := R(u_1, x)$, $t := t_2$, $u := u_2$
(7)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(KS) auf (3),(6)

- (VF): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$	(G)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(S) auf (3) mit $\varphi :=\ f(t_1, t_2) = f(x, t_2)$
(5)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(KS) auf (1), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi :=\ f(t_1, t_2) = f(u_1, x)$
(7)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(KS) auf (2), (6)

Dies schließt den Beweis von Lemma 7.20 ab.

□

7.3.1 Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Definition 7.21 (Widerspruchsfreiheit)**.** Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi$ D.h.: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ein Widerspruch herleiten lässt. widerspruchsvoll

(b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist. widerspruchsfrei

Definition 7.22 (Erfüllbarkeit)**.**
Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ heißt **erfüllbar**, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt. erfüllbar

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls (Korollar 7.15) folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 7.23.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls Φ erfüllbar ist, so ist Φ widerspruchsfrei.

Beweis:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.
Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll. Dann gibt es gemäß Definition 7.21 ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi$. Aus Korollar 7.15 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.
Natürlich können wir den Definitionsbereich von β so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt. Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. $\lightning$

$\square$

Im Rest von Kapitel 7.2 werden wir den Vollständigkeitssatz (d.h., die Aussage "$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$") dadurch beweisen, dass wir

1) Zeigen, dass jede widerspruchsfreie Formelmenge Φ erfüllbar ist (dies ist die Aussage des so gennanten **Erfüllbarkeitslemmas**, Lemma 7.28) und

2) zeigen, dass aus dem Erfüllbarkeitslemma folgt, dass für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$.

Dazu werden wir die im Folgenden zusammgenstellten Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen benutzen.

Lemma 7.24. *Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:*

(a) Φ ist widerspruchsvoll $\iff$ für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$

(b) Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ es gibt ein[2] $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \nvdash_{\mathscr{S}} \varphi$.

(c) Φ ist widerspruchsvoll $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$.

Beweis:

[2]Notation: Wir schreiben $\Phi \nvdash_{\mathscr{S}} \varphi$, um auszudrücken, dass nicht $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ gilt.

(a) „$\Longleftarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung gilt für jedes beliebige $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi$. Insbesondere ist Φ daher widerspruchsvoll.

„$\Longrightarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung ist Φ widerspruchsvoll, d.h. es gibt ein $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\psi$. Gemäß Definition 7.14 gibt es dann $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \psi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$ in $\mathscr{S}$ ableitbar sind.
Dann ist für jede beliebige $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ auch Folgendes in $\mathscr{S}$ ableitbar:

(1)	Γ_1	$\vdash$	ψ	
(2)	Γ_2	$\vdash$	$\neg\psi$	
(3)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	ψ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	$\neg\psi$	(E) auf (2)
(5)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	φ	(W) auf (3), (4)

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ für jedes beliebige $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

(b) Folgt direkt aus (a).

(c) „$\Longrightarrow$“ :
Folgt direkt aus (a).

„$\Longleftarrow$“ :
Es gelte $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Sei φ eine beliebige $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel. Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist. Daraus folgt direkt, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$. Gemäß (a) ist Φ daher widerspruchsvoll.

Gemäß Voraussetzung ist $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ in $\mathscr{S}$ ableitbar. Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathscr{S}$ erhalten wir wie folgt:

(1)	Γ	$\vdash$	$\exists v_0 \neg v_0 = v_0$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg \forall v_0\, v_0 = v_0$	(QA) siehe Lemma 7.19
(3)	$\emptyset$	$\vdash$	$v_0 = v_0$	(G)
(4)	$\emptyset$	$\vdash$	$\forall v_0\, v_0 = v_0$	($\forall$S) auf (3)
(5)	Γ	$\vdash$	$\forall v_0\, v_0 = v_0$	(E) auf (4)
(6)	Γ	$\vdash$	φ	(W) auf (5), (2).

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Daher ist Φ widerspruchsvoll. $\square$

Lemma 7.25.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(b) $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ *ist widerspruchsvoll.*

(c) Falls Φ widerspruchsfrei ist, so ist auch mindestens eine der beiden Mengen $\Phi \cup \{\varphi\}$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei.

Beweis:

(a) „$\Longrightarrow$“ : Sei $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$.
Gemäß der Regel (E) von $\mathscr{S}$ gilt auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$. Außerdem gilt natürlich gemäß der Regel (V) in $\mathscr{S}$, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi$. Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

„$\Longleftarrow$“ : Sei $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.
Wegen Lemma 7.24 (a) gilt dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$. Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist.
Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathscr{S}$ erhalten wir dann wie folgt:

(1)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(gemäß Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(3)	Γ	$\vdash$	φ	(FU) auf (1), (2).

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$. $\square_{(a)}$

(b) Analog zu (a).

(c) Angenommen, sowohl $\Phi \cup \{\varphi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ wäre widerspruchsvoll.
Aus (a) und (b) folgt dann: $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi$. Somit ist Φ widerspruchsvoll, also **nicht** widerspruchs**frei**. $\square$

Dies beendet die Auflistung der Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen.
Das folgende — sehr einfache — Lemma wird später, beim Beweis des Vollständigkeitssatzes sowie, in Kapitel 8, beim Beweis des sogenannten Endlichkeitssatzes (Satz 8.1) sehr nützlich sein.

Lemma 7.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)**.**
Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ jedes $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsfrei.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ : Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 7.24 (c) gilt dann $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Wegen Regel (E) von $\mathscr{S}$ gilt dann auch $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 7.24 (c) ist Φ somit widerspruchsvoll. $\lightning$

„$\Longleftarrow$“ : Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.
Lemma 7.24 (c) ergibt $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 7.21 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0 = v_0$. Lemma 7.24 (c) ergibt wiederum, dass Γ widerspruchsvoll ist. $\lightning$

$\square$

7.3.2 Der Vollständigkeitssatz

Satz 7.27 (Der Vollständigkeitssatz)**.**
Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Lemma 7.28 (Erfüllbarkeitslemma).
Für alle Signaturen σ gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Bevor wir Lemma 7.28 beweisen, zeigen wir zunächst, wie es genutzt werden kann, um den Vollständigkeitssatz zu beweisen.

Beweis von Satz 7.27 (Vollständigkeitssatz):

(b) „$\Longrightarrow$“ : Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.28).

„$\Longleftarrow$“ : Korollar 7.23 (einfache Folgerung aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls).

(a) „$\Longrightarrow$“ : Korollar 7.15 (Korrektheit des Sequenzenkalküls).

„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \nvdash_{\mathscr{S}} \varphi$.
Aus Lemma 7.24(a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar ist. Das heißt, es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Somit gilt $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. Laut Voraussetzung gilt aber $\Phi \models \varphi$ und daher gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. ↯

□

Der Rest von Kapitel 7 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 7.28) gewidmet.
Dazu sei σ eine beliebige Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. **Ziel:** Konstruiere eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Definition 7.29 (Termstruktur $\mathfrak{A}_\Phi$ und Terminterpretation $\mathcal{I}_\Phi$).
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

$\mathfrak{A}_\Phi$

(a) Die σ-Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert

- $\mathfrak{A}_\Phi := T_\sigma$ (d.h.: das Universum von $\mathfrak{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme).
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathfrak{A}_\Phi} := c$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k) \;:=\; f(t_1, \ldots, t_k).$$
- Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist
$$R^{\mathfrak{A}_\Phi} \;:=\; \big\{(t_1, \ldots, t_k) \in T_\sigma^k : \Phi \vdash_{\mathscr{S}} R(t_1, \ldots, t_k)\big\}.$$

Termstruktur

Die Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$ heißt **Termstruktur** von Φ.

β_Φ

(b) Die Belegung β_Φ: Var $\to A_\Phi$ ist definiert durch
$$\beta(x) \;:=\; x, \text{ für alle } x \in \mathrm{Var}.$$

$\mathcal{I}_\Phi$

Terminterpretation

(c) Die σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi := (\mathfrak{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt **Terminterpretation** von Φ.

Beobachtung 7.30.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = t$.

(b) Für alle $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ gilt:
$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \ldots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathscr{S}} R(t_1, \ldots, t_k).$$

Beweis: (a) folgt leicht per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
(b) lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1,\dots,t_k) \quad &\overset{\text{Semantik von FO}[\sigma]}{\iff} \quad \big(\llbracket t_1\rrbracket^{\mathcal{I}_\Phi},\dots,\llbracket t_k\rrbracket^{\mathcal{I}_\Phi}\big) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \\
&\overset{(a)}{\iff} \quad (t_1,\dots,t_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \\
&\overset{\text{Def. 7.29}}{\iff} \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} R(t_1,\dots,t_k).
\end{aligned}$$

□

Beobachtung 7.31.
Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt $\mathcal{I}_\Phi \not\models t_1 = t_2$.
Somit gilt: Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} t_1 = t_2$, so ist $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.
Ziel: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$, dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi.$$

Definition 7.32 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)**.** Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.
Die zweistellige Relation $\sim_\Phi$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert. Für alle $t, u \in T_\sigma$ gilt: $\sim_\Phi$

$$t \sim_\Phi u \;:\iff\; \Phi \vdash_{\mathscr{S}} t = u.$$

Lemma 7.33. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.*

(a) Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine ***Äquivalenzrelation*** *auf T_σ.*

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle σ-Terme $t_1,\dots,t_k,u_1,\dots,u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1,\dots,t_k \sim_\Phi u_k$:

$$f(t_1,\dots,t_k) \;\sim_\Phi\; f(u_1,\dots,u_k).$$

(c) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1,\dots,t_k,u_1,\dots,u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1,\dots,t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} R(t_1,\dots,t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathscr{S}} R(u_1,\dots,u_k).$$

Beweis:

(a) Folgt mit (G), (SG), (TG).

(b) Folgt mit (VF).

(c) Folgt mit (VR). □

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 7.33 erhalten wir:

Korollar 7.34. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.*
Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine ***Kongruenzrelation*** *auf $\mathfrak{A}_\Phi$, das heißt es gilt:* Kongruenzrelation

(a) $\sim_\Phi$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ.

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:

$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \ldots, a_k) \ \sim_\Phi \ f^{\mathfrak{A}_\Phi}(b_1, \ldots, b_k).$$

(c) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:

$$\mathfrak{A}_\Phi \models R(a_1, \ldots, a_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}_\Phi \models R(b_1, \ldots, b_k).$$

Wir betrachten nun die σ-Struktur, die man aus $\mathfrak{A}_\Phi$ erhält, indem man alle bezüglich $\sim_\Phi$ äquivalenten Elemente in A_Φ miteinander identifiziert.

Definition 7.35 (Die reduzierte Termstruktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$, die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$)**.** Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

$[t]_\Phi$

(a) Für jedes $t \in T_\sigma$ sei

$$[t]_\Phi \ := \ \{u \in T_\sigma : t \sim_\Phi u\}$$

die **Äquivalenzklasse** von t bezüglich $\sim_\Phi$ in T_σ.

$[\mathfrak{A}_\Phi]$

reduzierte Termstruktur

(b) Die σ-Struktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert

(I) Das Universum von $[\mathfrak{A}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] \ := \ \{\ [t]_\Phi \ : \ t \in T_\sigma \ \}$$

(das heißt: $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von σ-Termen).

(II) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathfrak{A}_\Phi]} := [c]_\Phi$.

(III) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist

$$R^{[\mathfrak{A}_\Phi]} \ := \Big\{ \big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\big) : (t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \big) \Big\}.$$

(IV) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{[\mathfrak{A}_\Phi]}\Big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi\Big) \ := \ \big[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi.$$

Beachte: Dies ist **wohldefiniert**, da gemäß Korollar 7.34 (b) für alle $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $[t_1]_\Phi = [u_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi = [u_k]_\Phi$ gilt:

$$\big[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k)\big]_\Phi \ = \ \big[f^{\mathfrak{A}_\Phi}(u_1, \ldots, u_k)\big]_\Phi.$$

Die σ-Struktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ heißt **reduzierte Termstruktur** von Φ.

$[\beta_\Phi]$

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi]$: $\mathrm{Var} \to [A_\Phi]$ ist für alle $x \in \mathrm{Var}$ definiert durch

$$[\beta_\Phi](x) \ := \ \big[\beta_\Phi(x)\big]_\Phi \ = \ [x]_\Phi.$$

$[\mathcal{I}_\Phi]$

reduzierte Terminterpretation

(d) Die σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi] := \big([\mathfrak{A}_\Phi], [\beta_\Phi]\big)$ heißt **reduzierte Terminterpretation** von Φ.

Lemma 7.36.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $\quad [\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} \;=\; [t]_\Phi$.

(b) Für alle ***atomaren*** FO$[\sigma]$*-Formeln φ gilt:* $\quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen; Details: Übung. $\square$

Eigentlich würden wir gern zeigen, dass Teil (b) von Lemma 7.36 nicht nur für **atomare** Formeln, sondern für **alle** Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt — dann wären wir auch mit dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas fertig, da für alle $\varphi \in \Phi$ natürlich $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi$ gilt. Leider lässt sich Teil (b) von Lemma 7.36 nur dann auf **alle** FO$[\sigma]$-Formeln verallgemeinern, wenn die Menge Φ die folgenden Eigenschaften hat:

Definition 7.37. Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **negationstreu**, wenn für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: negationstreu

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi.$$

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für alle FO$[\sigma]$-Formeln der Form $\exists x\,\varphi$ (mit $x \in \mathrm{Var}$ und $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$) gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass enthält Beispiele

$$\Phi \;\vdash_{\mathscr{S}}\; \left(\exists x\,\varphi \rightarrow \varphi\tfrac{t}{x}\right).$$

Der folgende Satz besagt, dass das Erfüllbarkeitslemma für alle widerspruchsfreien Formelmengen Φ gilt, die **negationstreu** sind und **Beispiele enthalten**.

Satz 7.38 (Der Satz von Henkin)**.** *Sei σ eine Signatur.* Satz von Henkin
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für jedes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi.$$

Beachte: *Daraus folgt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$.*

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von FO$[\sigma]$.

Zur Erinnerung: In diesem Kapitel fassen wir die Junktoren „$\rightarrow$“ und „$\leftrightarrow$“ als Abkürzungen für die entsprechenden Kombinationen aus $\wedge, \vee, \neg$ auf. Daher betrachten wir „$\rightarrow$“ und „$\leftrightarrow$“ in diesem Beweis nicht.

Induktionsanfang: φ atomar.
Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 7.36 (b).

Induktionsschritt: Wir betrachten folgende Fälle:

- $\varphi = \neg\varphi_1$:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{I}_\Phi] \models \neg\varphi_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad [\mathcal{I}_\Phi] \not\models \varphi_1 \\
&\underset{\text{Ind.annahme}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \not\vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1 \\
&\underset{\Phi\text{ negationstreu u. wid.frei}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi_1
\end{aligned}$$

- $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$:

$$\begin{aligned}[\mathcal{I}_\Phi] \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \quad \text{oder} \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_2 \\ &\underset{\text{Ind.annahme}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\varphi_1 \vee \varphi_2)\end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz ergibt sich wie folgt:
„$\Longrightarrow$“ : Folgt unmittelbar aus der Sequenzenregel ($\vee$S).
„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Falls $\Phi \nvdash_{\mathscr{S}} \varphi_1$, so gilt wegen der Negationstreue, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg \varphi_1$. Aus $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg \varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ folgt mit der Regel (DS) („Disjunktiver Syllogismus“, siehe Lemma 7.17), dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_2$.

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Übung!

- $\varphi = \exists x\, \varphi_1$:

„$\Longrightarrow$“ : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\, \varphi_1$.
Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gibt es also ein $t \in T_\sigma$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1$. Aus dem Substitutionslemma (Lemma 1.45) und wegen $[t]_\Phi = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}$ folgt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$.
Gemäß Induktionsannahme gibt es ein $t \in T_\sigma$, so dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\frac{t}{x}$.
Wegen der Sequenzenregel ($\exists$S) folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists x\, \varphi_1$.

„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists x\, \varphi_1$.
Nach Voraussetzung enthält Φ Beispiele, das heißt es gibt ein $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\exists x\, \varphi_1 \rightarrow \varphi_1\tfrac{t}{x}).$$

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists x\, \varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\exists x\, \varphi_1 \rightarrow \varphi_1\frac{t}{x})$. Die ableitbare Sequenzenregel (MP) („Modus Ponens“, siehe Lemma 7.17) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\frac{t}{x}$. Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$. Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass

$$[\mathcal{I}_\Phi]\tfrac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1.$$

Somit gilt $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\, \varphi_1$.

- $\varphi = \forall x\, \varphi_1$:

„$\Longrightarrow$“ : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also **für alle** $t \in T_\sigma$, dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$.
Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$.
Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\frac{t}{x}$. Somit gilt **für jedes** $t \in T_\sigma$, dass

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\tfrac{t}{x}. \qquad (*)$$

Angenommen, $\Phi \nvdash_{\mathscr{S}} \forall x\, \varphi_1$. Die Negationstreue von Φ liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg\forall x\, \varphi_1$. Die Quantorenaustauschregel (QA) (siehe Lemma 7.19) liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \exists x\, \neg \varphi_1$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term $u \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathscr{S}} (\exists x\, \neg \varphi_1 \rightarrow \neg \varphi_1\tfrac{u}{x}).$$

Die Modus Ponens Regel (MP) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \neg \varphi_1\frac{u}{x}$. Aber $(*)$ liefert auch, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\frac{u}{x}$. Dies steht im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit von Φ.

„$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \forall x\, \varphi_1$.
Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi_1$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist. Für jedes beliebige $t \in T_\sigma$ sind folgende Sequenzen in $\mathscr{S}$ ableitbar:

(1)	Γ	$\vdash$	$\forall x\, \varphi_1$	(gemäß Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \varphi_1\frac{t}{x}$	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	(V)
(3)	$\Gamma, \forall x\, \varphi_1$	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	($\forall$A) auf (2)
(4)	Γ	$\vdash$	$\varphi_1\frac{t}{x}$	(KS) auf (1), (3)

Somit gilt für jedes $t \in T_\sigma$, dass $\Phi \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_1\frac{t}{x}$. Die Induktionsannahme liefert, dass für jedes $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1\frac{t}{x}$. Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
Dies schließt den Beweis des Satzes von Henkin ab. $\square$

Im Folgenden werden wir versuchen, eine widespruchsfreie Meng $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ zu einer Menge $\Theta \supseteq \Phi$ zu erweitern, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält.
Um dies zu erreichen, werden wir Signaturen σ betrachten, die höchstens abzählbar groß sind. Wir in zwei Schritten vor, die in den beiden folgenden Lemmas durchgeführt werden.

Lemma 7.39.
Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur, und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge mit*

$$|\,\mathit{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)| \;=\; \infty. \tag{7.1}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Bemerkung: Die Voraussetzung 7.1 ist wichtig; vergleiche Aufgabe 7.7.

Beweis: Sei

$$\exists x_1\, \varphi_1, \quad \exists x_2\, \varphi_2, \quad \exists x_3\, \varphi_3, \quad \ldots$$

eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, die mit einem $\exists$-Quantor beginnen.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist; Details: Übung (Aufgabe 7.8).

Sei $\Psi_0 := \Phi$. Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Formel ψ_n und eine Formelmenge $\Psi_n := \Psi_{n-1} \cup \{\psi_n\} = \Phi \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ wie folgt: Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei y_n die erste Variable in Var die **nicht** in $\mathrm{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\})$ vorkommt (eine solche Variable existiert, da $|\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\}) \neq \emptyset$). Setze

$$\psi_n \;:=\; \big(\exists x_n\, \varphi_n \to \varphi_n\tfrac{y_n}{x_n}\big).$$

Es sei

$$\Psi \;:=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n \;=\; \Phi \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

Klar: Gemäß Konstruktion von Ψ gilt: Ψ enthält Beispiele.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ψ_n ist widerspruchsfrei.

Beweis: Per Induktion nach n.

$n = 0$:
$\Psi_0 = \Phi$ ist widerspruchsfrei gemäß der Voraussetzung von Lemma 7.39.

$n{-}1 \to n$:
Angenommen, Ψ_n ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 7.24 (c) gilt dann

$$\Psi_n \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0.$$

Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Psi_n$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Fall 1: $\psi_n \notin \Gamma$:

Dann ist $\Gamma \subseteq \Psi_{n-1}$, und daher $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Gemäß 7.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme

Fall 2: $\psi_n \in \Gamma$:

Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\psi_n\}$. Insbesondere gilt: $\Gamma' \subseteq_e \Psi_{n-1}$.
Da die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist, sind auch die folgenden Sequenzen in $\mathscr{S}$ ableitbar:

(1)	Γ', ψ_n	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	(da $\Gamma = \Gamma' \cup \{\psi_n\}$)
(2)	$\Gamma', \big(\neg \exists x_n\, \varphi_n \;\vee\; \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\big)$	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	$\big($da $\psi_n = (\exists x_n\, \varphi_n \to \varphi_n \frac{y_n}{x_n})\big)$
(3)	$\Gamma', \neg \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \neg \exists x_n\, \varphi_n$	(V)
(4)	$\Gamma', \neg \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash (\neg \exists x_n\, \varphi_n \;\vee\; \varphi_n \frac{y_n}{x_n})$	($\vee$S) auf (3)
(5)	$\Gamma', \neg \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (4), (2)
(6)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	(V)
(7)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \big(\neg \exists x_n\, \varphi_n \vee \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\big)$	($\vee$S) auf (6)
(8)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (7), (2)
(9)	$\Gamma', \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	($\exists$A) auf (8)
(10)	Γ'	$\vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$	(FU) auf (9), (5).

Das heißt, die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ ist in $\mathscr{S}$ ableitbar.
Da $\Gamma' \subseteq \Psi_{n-1}$ ist, gilt also $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 7.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist. Da $\Psi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$ ist, ist daher auch die Menge Ψ widerspruchsfrei (Details: Übung; siehe Aufgabe 7.9).

$\square$ Lemma 7.39

Lemma 7.40.
Sei σ eine ***abzählbare*** *Signatur, und sei $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Psi$, die negationstreu ist.*

Beweis:
Sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist (vgl. Aufgabe 7.8).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formelmenge Θ_n wie folgt:
$\Theta_0 \;:=\; \Psi$, und für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist

$$\Theta_n \;:=\; \begin{cases} \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} & \text{, falls } \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist.} \\ \Theta_{n-1} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sei $\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n$.

Behauptung 3. Θ ist negationstreu.

Beweis:
Sei φ eine beliebige FO[σ]-Formel. Da $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller FO[σ]-Formeln ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass $\varphi = \varphi_n$ ist.
Wir müssen zeigen, dass $\Theta \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_n$ oder $\Theta \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi_n$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: $\varphi_n \in \Theta$:

Dann gilt offensichtlich (gemäß Regel (V) von $\mathscr{S}$), dass $\Theta \vdash_{\mathscr{S}} \varphi_n$.

Fall 2: $\varphi_n \notin \Theta$:

Dann gilt: $\varphi_n \notin \Theta_n$ (da $\Theta_n \subseteq \Theta$). Gemäß Definition der Menge Θ_n ist daher $\Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll. Lemma 7.25 (b) liefert, dass $\Theta_{n-1} \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi_n$. Wegen $\Theta \supseteq \Theta_{n-1}$ gilt also: $\Theta \vdash_{\mathscr{S}} \neg\varphi_n$.

$\square_{\text{Beh. 3}}$

Behauptung 4. Θ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Übung (Aufgabe 7.10). $\square_{\text{Beh. 4}}$

Die Gültigkeit von Lemma 7.40 folgt unmittelbar aus Behauptung 3 und Behauptung 4.

$\square_{\text{Lemma 7.40}}$

Wir können nun endlich das Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen beweisen:

Lemma 7.41 (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen)**.**
*Sei σ eine **abzählbare** Signatur und sei $\Phi \subseteq$ FO[σ] eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann ist Φ erfüllbar.*

Beweis:
Sei Φ' die Formelmenge, die aus Φ entsteht, indem man in jeder Formel aus Φ für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Variable v_i überall durch die Variable v_{2i} ersetzt (**Zur Erinnerung:** $\text{Var} = \{v_i \;:\; i \in \mathbb{N}\}$). Dann gilt

(a) $|\text{Var} \setminus \text{frei}(\Phi')| = \infty$, da keine der Variablen $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, \ldots$ in Φ' vorkommt.

(b) Φ' ist widerspruchsfrei, denn:

Angenommen Φ' wäre widerspruchsvoll. Dann gilt gemäß Lemma 7.24 (c), dass $\Phi' \vdash_{\mathscr{S}} \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Somit gibt es ein $\Gamma' \subseteq_e \Phi'$, so dass die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ in $\mathscr{S}$ ableitbar ist. Sei Γ die Formelmenge, die aus Γ' entsteht, indem jede Variable der Form v_{2i} ersetzt wird durch die Variable v_i.
Durch geeignetes Umbenennen von Variablen in der Ableitung der Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$ erhält man eine Ableitung der Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0 \neg v_0{=}v_0$. Wegen $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist daher Φ widerspruchsvoll. $\lightning$

(c) Wenn Φ' erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar, denn:

Aus einer Interpretation, die Φ' erfüllt, lässt sich leicht eine Interpretation bilden, die Φ erfüllt.

Wegen (c) genügt es zu zeigen, dass Φ' erfüllbar ist. Wegen (a) und (b) erfüllt Φ' die Voraussetzungen von Lemma 7.39. Daher gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi'$, so dass Ψ Beispiele enthält.
Gemäß Lemma 7.40 gibt es eine negationstreue, widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \subseteq \Psi$. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele.
Der Satz von Henkin (Satz 7.38) liefert, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Theta$. Wegen $\Phi' \subseteq \Theta$ gilt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Phi'$. Somit ist Φ' erfüllbar. Gemäß (c) ist daher auch Φ erfüllbar.

$\square$

Insgesamt ist damit der Beweis der Erfüllbarkeitslemmas und damit auch der Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Spezialfall, dass σ eine abzählbare Signatur ist, abgeschlossen. In Kapitel 5.3 von [EFT07] findet sich ein Beweis des Erfüllbarkeitslemmas auch für überabzählbar große Signaturen.
In den nächsten beiden Kapiteln werden wir noch einige wichtige Sätze kennenlernen, die sich leicht aus dem Vollständigkeitssatz folgern lassen.

7.4 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre werden die Kapitel 4–6 in [EFT07] empfohlen.

7.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1.
Sei M eine Menge und sei $\mathcal{K}$ ein Kalkül über M.

Definition:

(a) Eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ über M heißt **in $\mathcal{K}$ ableitbar**, wenn b aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathcal{K}$ ableitbar ist.

(b) Zwei Kalküle $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ über M heißen **gleich stark**, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt: Die Menge der aus V in $\mathcal{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathcal{K}_2$ ableitbaren Elemente.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n, b \in M$ gilt:
$\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ ist genau dann in $\mathcal{K}$ ableitbar, wenn $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K} \cup \left\{ \dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b} \right\}$ gleich stark sind.

Aufgabe 7.2.
Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \big((\varphi \wedge \psi) \to \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

Aufgabe 7.3.
Betrachten Sie für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ die Regel

$$(\forall\exists)\ \frac{}{\Gamma,\ \exists x\,\varphi\ \vdash\ \forall x\,\varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ im Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ ableitbar ist.

(b) Sei $\mathscr{S}'$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathscr{S}$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob jede Sequenz in $\mathscr{S}'$ ableitbar ist.

Aufgabe 7.4.
Beweisen Sie Lemma 7.36.

Aufgabe 7.5.
Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin (Satz 7.38) aus.

Aufgabe 7.6.
Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathfrak{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi \quad := \quad & \{\, v_i = v_{i+2} \,:\, i \geqslant 1 \,\} \\ & \cup \{\ E(v_0, v_7),\ E(v_1, v_4),\ E(v_6, v_0),\ \forall v_1 \forall v_3\ \big(E(v_1, v_3) \to E(v_3, v_1)\big)\ \}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 7.7.
Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \,:\, t \in T_\sigma \,\} \ \cup\ \{\ \exists v_0 \exists v_1 \neg\, v_0 = v_1\ \}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Aufgabe 7.8.
Beweisen Sie, dass Folgendes gilt: Ist σ eine abzählbare Signatur, so ist die Menge aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln abzählbar.

Aufgabe 7.9.
Arbeiten Sie die Details am Ende des Beweises von Lemma 7.39 aus, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die im Beweis von Lemma 7.39 definierte Menge Ψ_n widerspruchsfrei, so ist auch die Menge $\Psi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$ widerspruchsfrei.

Aufgabe 7.10.
Beweisen Sie Behauptung 4 aus dem Beweis von Lemma 7.40, das heißt, zeigen Sie, dass die im Beweis von Lemma 7.40 definierte Formelmenge Θ widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 7.11.
Zeigen Sie Folgendes:

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\ \exists v_0\, P(v_0)\ \} \cup \{\, \neg\, P(t) \,:\, t \in T_\sigma \,\}$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.