2 Normalformen

2.1 Äquivalenz und Folgerung

Definition 2.1 (Äquivalenz, Folgerung)**.**
Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) φ und ψ heißen **äquivalent** (kurz: $\varphi \equiv \psi$, bzw. $\varphi \mathrel{=\!\!|\!\models} \psi$), wenn für alle zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi$. äquivalent $\varphi \equiv \psi$

(b) ψ **folgt aus** φ (bzw. φ impliziert ψ, kurz: $\varphi \models \psi$), wenn für alle zu φ und ψ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \varphi$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$. ψ folgt aus φ

Beobachtung:
Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- $\varphi \equiv \psi \iff \varphi \models \psi$ und $\psi \models \varphi$.
- $\varphi \models \psi \iff (\varphi \to \psi)$ ist allgemeingültig.
- $\varphi \equiv \psi \iff (\varphi \leftrightarrow \psi)$ ist allgemeingültig.

Beobachtung 2.2.
Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- $(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $(\varphi \to \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv \big((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\varphi \wedge \psi)\big) \equiv \big(\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\big)$
- $\forall x\, \varphi \equiv \neg\exists x\, \neg\varphi$

Daher können wir, falls nötig, auf die Symbole $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$ verzichten. D.h.: Jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel, in der keines der Symbole $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$ vorkommt.

2.2 Die pränexe Normalform

Definition 2.3.

(a) Eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel ψ heißt **quantorenfrei**, falls in ihr keins der Symbole $\exists, \forall$ vorkommt. quantorenfrei

(b) Eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ ist in **pränexer Normalform** (bzw. **Pränex-Normalform**), wenn sie von der Form Pränex-Normalform

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \psi$$

ist, wobei $n \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Var}$ und ψ quantorenfrei ist.
$Q_1 x_1, \ldots, Q_n x_n$ wird **Quantoren-Präfix von** φ genannt; ψ heißt **Kern** von φ bzw. **Matrix** von φ. Quantoren-Prefix Kern/Matrix

Satz 2.4 (Satz über die pränexe Normalform)**.**
Jede $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *ist äquivalent zu einer* $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* φ' *in pränexer Normalform mit* $\mathrm{frei}(\varphi') = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Bevor wir Satz 2.4 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 2.5.
Sei $\varphi(y) := \forall x\ \neg\big(\exists y\ E(x,y)\ \rightarrow\ \exists x\ E(x,y)\big)$.
Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

$\varphi \ \equiv\ \forall x\ \neg\big(\neg\exists y\ E(x,y)\ \vee\ \exists x\ E(x,y)\big)$	Elimination von " $\rightarrow$ "
$\equiv\ \forall x\ \neg\big(\forall y\ \neg E(x,y)\ \vee\ \exists x\ E(x,y)\big)$	$\neg\exists y\ \psi \equiv \forall y\ \neg\psi$
$\equiv\ \forall x\ \neg\big(\forall z_1\ \neg E(x,z_1)\ \vee\ \exists z_2\ E(z_2,y)\big)$	Umbenennung von gebundenen Variablen
$\equiv\ \forall x\ \neg\forall z_1\, \exists z_2\ \big(\neg E(x,z_1) \vee E(z_2,y)\big)$	Zusammenlegung der Disjunktion
$\equiv\ \forall x\, \exists z_1\, \forall z_2\ \neg\big(\neg E(x,z_1) \vee E(z_2,y)\big)$	Negation
$\equiv\ \forall x\, \exists z_1\, \forall z_2\ \big(E(x,z_1) \wedge \neg E(z_2,y)\big)$	De Morgan

Beweis von Satz 2.4:
Wir zeigen zunächst zwei Dinge:

Behauptung 1:
Sei $\psi := Q_1x_1 \cdots Q_nx_n\ \chi$, wobei $n \geqslant 0$, $Q_1,\ldots,Q_n \in \{\exists,\forall\}$ und $\chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
Für jedes $Q \in \{\exists,\forall\}$ sei

$$\widetilde{Q}\ :=\ \begin{cases} \forall & \text{falls } Q = \exists \\ \exists & \text{falls } Q = \forall. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\neg\psi\ \equiv\ \widetilde{Q}_1x_1 \cdots \widetilde{Q}_nx_n\ \neg\chi.$$

Beweis von Behauptung 1:
Einfaches Nachrechnen per Induktion über n unter Verwendung der Tatsache, dass

$$\neg\exists x\ \vartheta\ \equiv\ \forall x\ \neg\vartheta \qquad \text{und} \qquad \neg\forall x\ \vartheta\ \equiv\ \exists x\ \neg\vartheta$$

Details: Übung. $\square$

Behauptung 2:
Seien $\psi_1 := Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell\ \chi_1$ und $\psi_2 := Q'_1y_1 \cdots Q'_my_m\ \chi_2$, wobei $\ell, m \geqslant 0$, $Q_1,\ldots,Q_\ell,Q'_1,\ldots,Q'_m \in \{\exists,\forall\}$, $x_1,\ldots,x_\ell,y_1,\ldots,y_m \in \mathrm{Var}$, $\chi_1,\chi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Es gelte $\{x_1,\ldots,x_\ell\} \cap \mathrm{frei}(\chi_2) = \emptyset$ und $\{y_1,\ldots,y_m\} \cap \mathrm{frei}(\chi_1) = \emptyset$. Dann gilt für $* \in \{\wedge,\vee\}$, dass

$$(\psi_1 * \psi_2)\ \equiv\ Q_1x_1 \cdots Q_\ell x_\ell\, Q'_1y_1 \cdots Q'_1y_m\ (\chi_1 * \chi_2).$$

Beweis von Behauptung 2:
Zwei Induktionen über l bzw. m unter Verwendung der Tatsache, dass Folgendes gilt:
Kommt die Variable x nicht in ϑ_1 vor, so ist

(a) $(\vartheta_1 \ \vee \ \exists x\, \vartheta_2) \ \equiv \ \exists x\, (\vartheta_1 \ \vee \ \vartheta_2)$

(b) $(\vartheta_1 \ \wedge \ \exists x\, \vartheta_2) \ \equiv \ \exists x\, (\vartheta_1 \ \wedge \ \vartheta_2)$

(c) $(\vartheta_1 \ \vee \ \forall x\, \vartheta_2) \ \equiv \ \forall x\, (\vartheta_1 \ \vee \ \vartheta_2)$

(d) $(\vartheta_1 \ \wedge \ \forall x\, \vartheta_2) \ \equiv \ \forall x\, (\vartheta_1 \ \wedge \ \vartheta_2)$

Details: Übung. $\square$

Abschluss des Beweises von Satz 2.4:
Sei φ eine FO$[\sigma]$-Formel. Gemäß Beobachtung 2.2 können wir annehmen, dass in φ keins der Symbole $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ vorkommt. Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in Pränex-Normalform gibt mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Induktionsanfang:
Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbesondere in Pränex-Normalform.

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $Qx\, \psi$, mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \text{Var}$, $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es eine zu ψ äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $\text{frei}(\psi') = \text{frei}(\psi)$. Offensichtlich ist $\varphi' := Qx\ \psi'$ die gesuchte Formel in Pränex-Normalform.

Fall 2: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es eine Formel ψ' in Pränex-Normalform mit $\psi' \equiv \psi$ und $\text{frei}(\psi') = \text{frei}(\psi)$.

Klar: $\varphi \equiv \neg\psi'$.

Gemäß Behauptung 1 gibt es eine zu $\neg\psi'$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

Fall 3: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \text{FO}[\sigma]$.

Gemäß Induktionsannahme gibt es Formeln ψ_1', ψ_2' in Pränex-Normalform mit $\psi_1' \equiv \psi_1$, $\psi_2' \equiv \psi_2$, $\text{frei}(\psi_1') = \text{frei}(\psi_1)$ und $\text{frei}(\psi_2') = \text{frei}(\psi_2)$.

Klar: $\varphi \equiv (\psi_1' * \psi_2')$.

Sei $Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell\ \chi_1$ die Form von ψ_1' (mit χ_1 quantorenfrei) und sei $Q_1' y_1 \cdots Q_m' y_m\ \chi_2$ die Form von ψ_2' (mit χ_2 quantorenfrei).
Durch konsistentes Umbenennen der in ψ_1', ψ_2' gebundenen Variablen $x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \text{frei}(\chi_2) = \emptyset$ und $\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \text{frei}(\chi_1) = \emptyset$. Gemäß Behauptung 2 gibt es eine zu $(\psi_1' * \psi_2')$ äquivalente Formel in Pränex-Normalform.

$\square_{\text{Satz 2.4}}$

2.3 Termreduzierte Formeln

Terme, die in einer FO[σ]-Formel vorkommen, können „ineinander geschachtelte“ Funktionssymbole enthalten.

Beispiel 2.6.
Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{1}{g}\}$ und $\varphi := \forall x\ \exists y\ f\big(x, g(y)\big) = x$.
Die Formel φ enthält hier den „geschachtelten“ Term $f\big(x, g(y)\big)$. Man sieht leicht, dass φ äquivalent ist zur Formel

$$\widehat{\varphi}\ :=\ \forall x\ \exists y\, \exists z\ \big(g(y) = z\ \wedge\ f(x,z) = x\big),$$

in der keine „geschachtelten“ Terme vorkommen.

Definition 2.7.
Eine FO[σ]-Formel heißt **termreduziert**, wenn all ihre atomaren Teilformeln von der Form

- $R(x_1, \ldots, x_r)$, mit $R \in \sigma$, $r = \mathrm{ar}(R)$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{Var}$,
- $f(x_1, \ldots, x_k) = y$, mit $f \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(f)$, $x_1, \ldots, x_k, y \in \mathrm{Var}$,
- $x = c$, mit $x \in \mathrm{Var}$, $c \in \sigma$ oder
- $x = y$, mit $x, y \in \mathrm{Var}$

sind.

Satz 2.8.
Jede FO[σ]*-Formel* φ *ist äquivalent zu einer* ***termreduzierten*** FO[σ]*-Formel* φ' *mit* $\mathrm{frei}(\varphi') = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Beweis:
Per Induktion über den Aufbau von Formeln ordnen wir jeder FO[σ]-Formel φ eine äquivalente termreduzierte Formel φ' zu.

Für gegebenes $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ sei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Auflistung aller **nicht** in φ vorkommenden Variablen aus Var (in der durch $v_0, v_1, v_2, \ldots$ induzierten Reihenfolge).

Fall 1: φ ist von der Form $t = x$, mit $x \in \mathrm{Var}$, $t \in T_\sigma$.
φ' wird induktiv über den Aufbau von t wie folgt definiert:

- Ist t von der Form y, mit $y \in \mathrm{Var}$, so

$$\varphi'\ :=\ \varphi \quad (\varphi \text{ ist von der Form } y = x).$$

- Ist t von der Form c, mit $c \in \sigma$, so

$$\varphi'\ :=\ x = c \quad (\varphi \text{ ist von der Form } c = x).$$

- Ist t von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$ mit $f \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(f)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so

$$\varphi'\ :=\ \exists x_1 \cdots \exists x_k\ \big(f(x_1, \ldots, x_k) = x\ \wedge\ [t_1 = x_1]'\ \wedge\ \cdots \wedge\ [t_k = x_k]'\big)$$
$$(\varphi \text{ ist von der Form } f(t_1, \ldots, t_k) = x).$$

Fall 2: φ ist von der Form $t_1 = t_2$, wobei $t_1, t_2 \in T_\sigma$ und t_2 **keine** Variable ist. Dann setze

$$\varphi' \;:=\; \exists x_1 \; \big([t_1 = x_1]' \;\wedge\; [t_2 = x_1]'\big).$$

Fall 3: φ ist von der Form $R(t_1, \ldots, t_r)$ mit $R \in \sigma$, $r = \text{ar}(R)$, $t_1, \ldots, t_r \in T_\sigma$. Dann setze

$$\varphi' \;:=\; \exists x_1 \cdots \exists x_r \; \big(R(x_1, \ldots, x_r) \;\wedge\; [t_1 = x_1]' \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; [t_r = x_r]'\big).$$

Fall 4: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \text{FO}[\sigma]$. Dann setze

$$\varphi' \;:=\; \neg\psi'.$$

Fall 5: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \text{FO}[\sigma]$ und $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann setze

$$\varphi' \;:=\; (\psi_1' * \psi_2').$$

Fall 6: φ ist von der Form $Qx\;\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \text{Var}$, $\psi \in \text{FO}[\sigma]$. Dann setze

$$\varphi' \;:=\; Qx\;\psi'.$$

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle gilt: $\varphi' \equiv \varphi$, φ' ist termreduziert und $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

□

2.4 Relationale Signaturen

Definition 2.9.
Eine Signatur heißt **relational**, wenn sie keine(e) Funktionssymbol(e) und kein(e) Konstantensymbole(e) enthält. relationale Signatur

Manchmal (z.B. in den Kapiteln 3 und 4) ist es vorteilhaft, sich auf **relationale** Signaturen zu beschränken. Im Folgenden zeigen wir, dass dies keine wirkliche Einschränkung ist, da man Funktionen und Konstanten durch geeignete Relationen repräsentieren kann.

Definition 2.10.

(a) Jeder Signatur σ ordnen wir eine **relationale** Signatur σ_{rel} wie folgt zu:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{rel}} \;:=\; & \{R : R \in \sigma \text{ ist ein Relationssymbol}\} \\ & \dot\cup\; \{R_f : f \in \sigma \text{ ist ein Funktionssymbol}\} \\ & \dot\cup\; \{R_c : c \in \sigma \text{ ist ein Konstantensymbol}\}. \end{aligned}$$

Für jedes $c \in \sigma$ ist dabei R_c ein 1-stelliges Relationssymbol; für jedes $f \in \sigma$ mit $k := \text{ar}(f)$ ist R_f ein Relationssymbol der Stelligkeit $k + 1$.

(b) Jeder σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ordnen wir eine σ_{rel}-Struktur $\mathfrak{A}_{\text{rel}}$ wie folgt zu:

- $\mathfrak{A}_{\text{rel}}$ hat dasselbe Universum wie $\mathfrak{A}$, d.h. $A_{\text{rel}} = A$.
- $\mathfrak{A}_{\text{rel}}$ stimmt mit $\mathfrak{A}$ auf den Relationssymbolen aus σ überein, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ gilt $R^{\mathfrak{A}_{\text{rel}}} := R^{\mathfrak{A}}$.

- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ mit $k := \mathrm{ar}(f)$ ist $R_f^{\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}}}$ der Graph der Funktion $f^{\mathfrak{A}}$, d.h.
$$R_f^{\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}}} \;:=\; \big\{(a_1,\dots,a_k,b) \in A_{\mathrm{rel}}^{k+1} : f^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_k) = b\big\}.$$
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $R_c^{\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}}}$ die 1-stellige Relation, die nur das Element $c^{\mathfrak{A}}$ enthält, d.h. $R_c^{\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}}} := \{c^{\mathfrak{A}}\}$.

Der folgende Satz besagt, dass $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln genau dieselben Aussagen über σ-Interpretationen machen können, wie $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{rel}}]$-Formeln über die entsprechenden σ_{rel}-Interpretationen.

Satz 2.11.

(a) *Zu jeder* $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *gibt es eine* $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{rel}}]$*-Formel* $\hat{\varphi}$*, so dass für alle zu* φ *passenden* σ*-Intepretationen* $(\mathfrak{A},\beta)$ *gilt:*
$$(\mathfrak{A},\beta) \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}},\beta) \models \hat{\varphi}.$$

(b) *Zu jeder* $\mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{rel}}]$*-Formel* φ *gibt es eine* $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* $\hat{\varphi}$*, so dass für alle zu* $\hat{\varphi}$ *passenden* σ*-Interpretationen* $(\mathfrak{A},\beta)$ *gilt:*
$$(\mathfrak{A}_{\mathrm{rel}},\beta) \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathfrak{A},\beta) \models \hat{\varphi}.$$

Beweis:

(a) Gemäß Satz 2.8 genügt es, $\hat{\varphi}$ für **termreduzierte** $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ anzugeben. Wir tun dies induktiv über den Aufbau von termreduzierten $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ:

Fall 1: φ ist von der Form $R(y_1,\dots,y_r)$ mit $R \in \sigma$, $r = \mathrm{ar}(R)$, $y_1,\dots,y_r \in \mathrm{Var}$.

Dann ist $\hat{\varphi} := \varphi$.

Fall 2: φ ist von der Form $f(x_1,\dots,x_k) = y$ mit $f \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(f)$, $x_1,\dots,x_k,y \in \mathrm{Var}$.

Dann ist $\hat{\varphi} := R_f(x_1,\dots,x_k,y)$.

Fall 3: φ ist von der Form $x = c$ mit $x \in \mathrm{Var}$, $c \in \sigma$.

Dann ist $\hat{\varphi} := R_c(x)$.

Fall 4: φ ist von der Form $x = y$ mit $x,y \in \mathrm{Var}$.

Dann ist $\hat{\varphi} := \varphi$.

Fall 5: φ ist von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ψ ist termreduziert.

Dann ist $\hat{\varphi} := \neg\hat{\psi}$.

Fall 6: φ ist von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1,\psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und ψ_1,ψ_2 sind termreduziert.

Dann ist $\hat{\varphi} := (\hat{\psi_1} * \hat{\psi_2})$.

Fall 7: φ ist von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists,\forall\}$, $x \in \mathrm{Var}$, $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ψ ist termreduziert.

Dann ist $\hat{\varphi} := Qx\,\hat{\psi}$.

Man sieht leicht, dass in jedem der oben angegebenen Fälle für jede zu φ passende σ-Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathfrak{A}_{\text{rel}}, \beta) \models \hat{\varphi}.$$

(b) Zum Beweis von (b) können wir ähnlich wie in (a) verfahren, wobei wir an Stelle von Fall 2 und Fall 3 folgendermaßen vorgehen:

Fall 2': φ ist von der Form $R_f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ mit $k+1 = \text{ar}(R_f)$, $x_1, \dots, x_{k+1} \in \text{Var}$.
Dann ist $\hat{\varphi} := f(x_1, \dots, x_k) = x_{k+1}$.

Fall 3': φ ist von der Form $R_c(x)$ mit $x \in \text{Var}$.
Dann ist $\hat{\varphi} := t = c$.

Man sieht leicht, dass in jedem der Fälle für jede zu $\hat{\varphi}$ passende σ-Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta)$ gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \hat{\varphi} \iff (\mathfrak{A}_{\text{rel}}, \beta) \models \varphi.$$

□

2.5 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre sind die Kapitel 8.1 und 8.4 aus [EFT07] empfohlen.

2.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1.
Entwickeln Sie einen Algorithmus, der bei Eingabe einer beliebigen FO$[\sigma]$-Formel φ eine zu φ äquivalente Formel φ' in pränexer Normalform erzeugt.
Analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus (in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe φ).