6 Der Satz von McNaughton und Papert

In diesem Kapitel wird eine Teilklasse der regulären Wortsprachen betrachtet: Die so genannten **sternfreien regulären Wortsprachen**. Der Satz von McNaughton und Papert (1971) besagt, dass man mit Sätzen der Logik erster Stufe genau die sternfreien regulären Wortsprachen beschreiben kann.

6.1 Sternfreie reguläre Wortsprachen und FO-Definierbarkeit

Es sei $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ ein endliches Alphabet, das, für eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$, aus ℓ verschiedenen Buchstaben besteht. Mit Σ^* bzw. Σ^+ bezeichnen wir die Mengen aller endlichen Worte bzw. aller endlichen nicht-leeren Worte über dem Alphabet Σ. Für $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|$ die Länge des Wortes w. Um Worte als endliche Strukturen zu repräsentieren, gehen wir wie in Aufgabe 1.4 aus Kapitel 1 vor:

Definition 6.1 (Repräsentation von Worten durch Strukturen)**.**

(a) Sei σ_Σ die Signatur, die aus den folgenden Relationssymbolen besteht:
- σ_Σ enthält ein 2-stelliges Relationssymbol $\leqslant$.
- Für jeden Buchstaben $a \in \Sigma$ enthält σ_Σ ein 1-stelliges Relationssymbol P_a.

(b) Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n \in \Sigma^+$ der Länge $n \geqslant 1$ (mit $w_i \in \Sigma$ f.a. $i \in \{1, \ldots, n\}$) ordnen wir die folgende σ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_w = \big(A_w, \leqslant^{\mathfrak{A}_w}, P_{a_1}^{\mathfrak{A}_w}, \ldots, P_{a_\ell}^{\mathfrak{A}_w}\big)$ zu:
- $A_w := \{1, \ldots, n\}$ ist die Menge aller Positionen von w.
- $\leqslant^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$.
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{i \in A_w : w_i = a\}$ die Menge aller Positionen von w, an denen der Buchstabe a steht.

(c) $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{\max\}$ sei die Signatur, die zusätzlich zu den Symbolen aus σ_Σ noch ein Konstantensymbol max enthält.

(d) Die σ'_Σ-Struktur $\mathfrak{A}'_w$ ist definiert durch $\mathfrak{A}'_w = \big(A_w, \leqslant^{\mathfrak{A}_w}, P_{a_1}^{\mathfrak{A}_w}, \ldots, P_{a_\ell}^{\mathfrak{A}_w}, \max^{\mathfrak{A}'_w}\big)$ mit $\max^{\mathfrak{A}'_w} := n$.

Beispiel 6.2.
Ist $\Sigma = \{a, b\}$ und $w = aaab$, so ist $\mathfrak{A}_w$ die σ_Σ-Struktur mit

- Universum $A_w = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $\leqslant^{\mathfrak{A}_w}$ ist die lineare Ordnung auf $\{1, 2, 3, 4\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} = \{1, 2, 3\}$ und $P_b^{\mathfrak{A}_w} = \{4\}$.

$\mathfrak{A}'_w$ ist die σ'_Σ-Struktur, die mit $\mathfrak{A}_w$ auf σ_Σ übereinstimmt, und bei der $\max^{\mathfrak{A}'_w} = 4$ ist.

Definition 6.3 (FO-definierbarkeit einer Sprache).

φ beschreibt L

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und sei φ ein FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz. Wir sagen φ **beschreibt** L, falls für jedes (nicht-leere) Wort $w \in \Sigma^+$ gilt: $w \in L \iff \mathfrak{A}'_w \models \varphi$.

FO-definierbar

(b) $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **FO-definierbar**, falls es einen FO$[\sigma_{\Sigma'}]$-Satz φ gibt, der L beschreibt.

Beispiel 6.4.
Für $\Sigma := \{a, b\}$ gilt: Der FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz

$$\varphi \ := \ \Big(P_b(\max) \wedge \exists x \forall y \, \Big(\big(y \leqslant x \to P_a(y)\big) \wedge \big(x \leqslant y \to (P_b(y) \ \vee \ y{=}x)\big)\Big)\Big)$$

beschreibt die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, die durch den regulären Ausdruck a^*ab^*b definiert wird.

Definition 6.5 (Sternfreie reguläre Sprachen).

sternfreie reguläre Ausdrücke: SFR_Σ

(a) Die Klasse SFR_Σ aller **sternfreien regulären Ausdrücke** über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:
   - Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ.
   - Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ.
   - Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gilt auch:
     $\bar{r} \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, $\ (r \,|\, s) \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, $\ (r \cdot s) \in \mathrm{SFR}_\Sigma$.

$L(r)$

(b) Jeder sternfreie reguläre Ausdruck r **beschreibt** eine Sprache $L(r) \subseteq \Sigma^*$, die wie folgt definiert ist
   - $L(\emptyset) = \emptyset$.
   - Für jedes $a \in \Sigma$ ist $L(a) = \{a\}$.
   - Für alle $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ gilt:
     $L(\bar{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$, $\ L\big((r \,|\, s)\big) := L(r) \cup L(s)$, $\ L\big((r \cdot s)\big) := \{wu : w \in L(r), u \in L(s)\}$.

sternfrei regulär

(c) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **sternfrei regulär**, wenn es ein $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ mit $L(r) = L$ gibt.

Beispiel 6.6.
Die durch den regulären Ausdruck $(a \,|\, b)^* a (a \,|\, b)^* b$ definierte Sprache wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $\big((\overline{\emptyset} \cdot a) \cdot (\overline{\emptyset} \cdot b)\big)$ beschrieben.

Satz 6.7 (Der Satz von McNaughton und Papert, 1971).
Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt: L ist sternfrei regulär $\iff$ L ist FO-definierbar.

Beweis:
„$\Longrightarrow$“ :
Per Induktion über den Aufbau der sternfreien regulären Ausdrücke zeigt man, dass es für jedes $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ einen FO$[\sigma_\Sigma]$-Satz φ_r gibt, der die Sprache L_r beschreibt $\big($beachte $\sigma_\Sigma = \sigma'_\Sigma \setminus \{\max\}\big)$. Details: Übung!

„$\Longleftarrow$“ :
Wir gehen per Induktion über die Quantorentiefe m von FO$[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen vor. Wegen Beobachtung 2.2 können wir o.B.d.A. annehmen, dass keins der Symbole $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$ in den von uns betrachteten FO$[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen vorkommt.

Induktionsanfang $m = 0$: Sei φ ein FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe $m = 0$.

Fall 1: φ ist von der Form $P_a(\max)$ für ein $a \in \Sigma$.
Dann beschreibt φ dieselbe Sprache wie der sternfreie reguläre Ausdruck $(\overline{\emptyset} \cdot a)$.

Fall 2: φ ist von der Form $\max \leqslant \max$ oder von der Form $\max = \max$.
Dann beschreibt φ dieselbe Sprache wie der sternfreie reguläre Ausdruck $\overline{\emptyset}$.

Fall 3: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$, wobei φ_1 ein $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe $m = 0$ ist.
Per Induktion gibt es dann einen sternfreien regulären Ausdruck r, der dieselbe Sprache wie φ_1 beschreibt. Der sternfreie reguläre Ausdruck $\overline{r}$ beschreibt dann dieselbe Sprache wie φ.

Fall 4: φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, wobei φ_1, φ_2 $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $m = 0$ sind.
Per Induktion gibt es dann für jedes $i \in \{1, 2\}$ ein $r_i \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, das dieselbe Sprache wie φ_i beschreibt. Der sternfreie reguläre Ausdruck $(r_1 \,|\, r_2)$ beschreibt dann dieselbe Sprache wie φ.

Induktionsschritt $m \mapsto m{+}1$: Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, das dieselbe Sprache wie ψ beschreibt.

Behauptung: Für jeden $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe $m{+}1$ gibt es ein $r_\varphi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, das dieselbe Sprache wie φ beschreibt.

Beweis: Per Induktion nach dem Aufbau von $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen der Quantorentiefe $m{+}1$.

Fall 1: φ ist von der Form $\exists x\ \psi(x)$, wobei $\psi(x)$ eine $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Formel der Quantorentiefe m mit $\mathrm{frei}(\psi) = \{x\}$ ist.

Wir betrachten die Menge

$$m\text{-Typen}_0 \;:=\; \big\{\varphi^m_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma'_\Sigma\text{-Struktur}\big\}$$

aller m-Isomorphietypen von σ'_Σ-Strukturen. Von Bemerkung 4.20 und Korollar 4.38 wissen wir, dass m-Typen$_0$ eine **endliche** Menge von $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen der Quantorentiefe $\leqslant m$ ist, so dass für alle σ'_Σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{A}$.

Sei S_ψ die folgendermaßen definierte Menge aller Paare (τ, τ') von Elementen aus m-Typen$_0$:

$$\begin{aligned} S_\psi \;:=\; \big\{(\tau,\tau') :\;& \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_0,\\ & \text{es gibt Worte } \tilde{w}, \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für die Position } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ gilt:}\\ & \mathfrak{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \ \text{ und } \ \mathfrak{A}'_{\tilde{w}} \models \tau \ \text{ und } \ \mathfrak{A}'_{\tilde{u}} \models \tau' \big\}. \end{aligned}$$

Beachte: S_ψ ist endlich, da m-Typen$_0$ endlich ist.

Behauptung $\circledast$**:** Für alle Worte $v \in \Sigma^+$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{A}'_v \models \exists x\, \psi(x) \\ \iff\ & \mathfrak{A}'_v \models \psi\tfrac{\max}{x} \quad \text{oder} \\ & \text{es gibt ein } p \in \{1,\ldots,|v|-1\} \text{ sowie } (\tau,\tau') \in S_\psi, \text{ so dass} \\ & \text{für die Worte } w, u \text{ mit } v = wu \text{ und } |w| = p \text{ gilt: } \mathfrak{A}'_w \models \tau \text{ und } \mathfrak{A}'_u \models \tau' \\ & (\text{d.h. } \tau \text{ und } \tau' \text{ sind die } m\text{-Isomorphietypen von } w \text{ und } u). \end{aligned}$$

Beweis von Behauptung ⊛:
„$\Longrightarrow$“ :
Folgt direkt aus der Definition der Menge S_ψ.
„$\Longleftarrow$“ :
Falls $\mathfrak{A}'_v \models \psi\frac{\max}{x}$, so gilt $\mathfrak{A}'_v \models \exists x\,\psi(x)$. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass es $p \in \{1,\ldots,|v|-1\}$ und $(\tau,\tau') \in S_\psi$ gibt, so dass für die Worte w,u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt:

$$\mathfrak{A}'_w \models \tau \quad (\text{d.h.: } \tau = \varphi^m_{\mathfrak{A}'_w}) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{A}'_u \models \tau' \quad (\text{d.h.: } \tau' = \varphi^m_{\mathfrak{A}'_u}). \tag{6.1}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $\mathfrak{A}'_{wu} \models \exists x\,\psi(x)$ gilt.

Wegen $(\tau,\tau') \in S_\psi$ muss es gemäß der Definition der Menge S_ψ Worte $\tilde{w},\tilde{u} \in \Sigma^+$ geben, so dass für $\tilde{p} := |\tilde{w}|$ gilt:

$$\mathfrak{A}_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'_{\tilde{w}} \models \tau \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'_{\tilde{u}} \models \tau'. \tag{6.2}$$

Aus (6.1) und den letzten beiden Aussagen von (6.2) folgt gemäß dem Satz von Ehrenfeucht (Korollar 4.38), dass $\mathfrak{A}'_w \equiv_m \mathfrak{A}'_{\tilde{w}}$ und $\mathfrak{A}'_u \equiv_m \mathfrak{A}'_{\tilde{u}}$.

Kompositionslemma

Das folgende **Kompositionslemma** liefert, dass auch $\big(\mathfrak{A}'_{wu},p\big) \equiv_m \big(\mathfrak{A}_{\tilde{w}\tilde{u}},\tilde{p}\big)$ gilt.

Lemma 6.8 (Kompositionslemma)**.**
Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $w,\tilde{w},u,\tilde{u}$ nicht-leere Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a_1,\ldots,a_\ell\}$ mit $\mathfrak{A}'_w \equiv_m \mathfrak{A}'_{\tilde{w}}$ und $\mathfrak{A}'_u \equiv_m \mathfrak{A}'_{\tilde{u}}$, so gilt für $p := |w|$ und $\tilde{p} := |\tilde{w}|$, dass $\big(\mathfrak{A}'_{wu},p\big) \equiv_m \big(\mathfrak{A}_{\tilde{w}\,\tilde{u}},\tilde{p}\big)$.

Beweis: Übung (Aufgabe 6.4). $\square$

Wegen $m = \mathrm{qr}(\psi)$ und $\mathfrak{A}_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}]$ (gemäß (6.2)), liefert der Satz von Ehrenfeucht (Satz 4.21) daher, dass auch $\mathfrak{A}'_{wu} \models \psi[p]$ gilt. Insbesondere gilt dann auch $\mathfrak{A}'_{wu} \models \exists x\,\psi(x)$. $\square_{\text{Beh. ⊛}}$

Für den Satz $\varphi = \exists x\,\psi(x)$ liefert Behauptung ⊛, dass die von φ beschriebene Sprache $\{v \in \Sigma^+ : \mathfrak{A}'_v \models \varphi\}$ folgendermaßen aussieht:

$$\{v \in \Sigma^+ : \mathfrak{A}'_v \models \psi\tfrac{\max}{x}\} \;\cup \bigcup_{(\tau,\tau')\in S_\psi} L_{(\tau,\tau')},$$

wobei $L_{(\tau,\tau')} := \big\{wu :\ w,u \in \Sigma^+ \text{ und } \mathfrak{A}'_w \models \tau \text{ und } \mathfrak{A}'_u \models \tau'\big\}$.
Da τ und τ' FO$[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ sind, gibt es laut Induktionsannahme sternfreie reguläre Ausdrücke r_τ und $r_{\tau'}$, die dieselben Sprachen wie τ und τ' beschreiben. Daher gilt:

$$L_{(\tau,\tau')} = L\big((r_\tau \cdot r_{\tau'})\big).$$

Außerdem ist $\psi\frac{\max}{x}$ ein FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz der Quantorentiefe m. Laut Induktionsannahme gibt es daher einen sternfreien regulären Ausdruck s, der dieselbe Sprache wie $\psi\frac{\max}{x}$ beschreibt.
Insgesamt gilt: Ist $(\tau_1,\tau'_1),\ldots,(\tau_t,\tau'_t)$ eine Liste aller Elemente in der Menge S_ψ, so beschreibt der sternfreie reguläre Ausdruck

$$r_\varphi \;:=\; \big(s \,\big|\, (r_{\tau_1} \cdot r_{\tau'_1}) \,\big|\, \cdots \,\big|\, (r_{\tau_t} \cdot r_{\tau'_t})\big)$$

dieselbe Sprache wie der FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ.

Somit ist der Beweis von Fall 1 des Induktionsschritts abgeschlossen.

Fall 2: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$ oder von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, wobei φ_1 und φ_2 FO$[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $m+1$ sind:
Analog zu Fall 3 und 4 des Induktionsanfangs.

Insgesamt ist damit der Beweis von Satz 6.7 abgeschlossen. □

Bemerkung 6.9.
Aus dem Satz von McNaughton und Papert und den Ergebnissen aus Kapitel 4 lässt sich leicht folgern, dass es reguläre Sprachen gibt, die **nicht** sternfrei regulär sind.

Details: Übung

6.2 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre werden Kapitel 7.5 in [Lib04] sowie Kapitel 6.4 in [EF99] empfohlen.

6.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1.
Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $\sigma := \{\leqslant, P_a, P_b\}$. Geben Sie sternfreie reguläre Ausdrücke an, die die folgenden Sprachen beschreiben:

$$\Sigma^*, \qquad a(a|b)^*bb(a|b)^*, \qquad a^*, \qquad a^*b^*, \qquad (ab)^*.$$

Aufgabe 6.2.
Beweisen Sie die Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von McNaughton und Papert. Genauer: Zeigen Sie dass für jedes endliche Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_\ell\}$ gilt:
Für jede sternfreie reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gibt es einen FO$[\sigma]$-Satz φ, der die Sprache L beschreibt.

Aufgabe 6.3.
Finden Sie eine Sprache L, für die Sie beweisen können, dass Folgendes gilt:
L ist regulär, aber L ist nicht sternfrei regulär.

Aufgabe 6.4.
Beweisen Sie das Kompositionslemma Lemma 6.8.
Hinweis: Benutzen Sie Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele (vgl. Kapitel 4) und gehen Sie ähnlich vor wie in Aufgabe 4.8.