8 Der Kompaktheitssatz und der Satz von Löwenheim und Skolem

8.1 Der Kompaktheitssatz

Kompaktheitssatz
Endlichkeitssatz

Der **Kompaktheitssatz** ist auch unter dem Namen **Endlichkeitssatz** bekannt. Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 7 kann der Kompaktheitssatz leicht gezeigt werden.

Satz 8.1 (Kompaktheitssatz bzw. Endlichkeitssatz)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge. Dann gilt:

(a) Φ *ist erfüllbar* $\iff$ *Jede* ***endliche*** *Teilmenge von* Φ *ist erfüllbar.*

(b) Für jedes $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \textit{Es gibt eine } \textbf{\textit{endliche}} \textit{ Menge } \Gamma \subseteq \Phi \textit{ mit } \Gamma \models \psi.$$

Beweis:

(a)
$$\begin{aligned} \Phi \text{ erfüllbar} \; & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \; \Phi \text{ widerspruchsfrei} \\ & \underset{\substack{\text{Lemma 7.26} \\ \text{(Syntakt. Endlichkeitslemma)}}}{\iff} \; \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist widerspruchsfrei.} \\ & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \; \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist erfüllbar.} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \Phi \models \psi \; & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \; \Phi \vdash_{\mathscr{S}} \psi \\ & \iff \; \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \psi \\ & \underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \; \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \models \psi. \end{aligned}$$

□

Man kann den Kompaktheitssatz nutzen, um zu zeigen, dass betimmte Klasse von Strukturen nicht $\mathrm{FO}[\sigma]$-definierbar (in der Klasse **aller** σ-Strukturen) sind.
Zur Formulierung der Ergebnisse sind die folgenden Notationen nützlich:

Definition 8.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)**.** Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen sei

$$\mathrm{Mod}_\sigma(\Phi) \; := \; \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

Modellklasse

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ.

axiomatisierbar
Δ-elementar

(b) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt (erststufig) **axiomatisierbar** (oder **Δ-elementar**), wenn es eine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

(c) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt **endlich axiomatisierbar** (oder **elementar**), wenn es eine **endliche** Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

endlich axiomatisierbar
elementar

Beobachtung 8.3.
$\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn es einen FO[σ]-Satz φ mit $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt. Daher gilt: $\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn $\mathcal{K}$ FO-definierbar in der Klasse **aller** σ-Strukturen ist (vergleiche Definition 4.16).

Korollar 8.4.
Für jede Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen gilt:

$$\mathcal{K} \text{ ist endlich axiomatisierbar} \iff \mathcal{K}^C := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \notin \mathcal{K}\} \text{ ist endlich axiomatisierbar.}$$

Beweis: Übung.

□

Definition 8.5.
Die **Mächtigkeit** einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Wir bezeichnen eine Menge M als **abzählbar**, wenn sie entweder endlich ist oder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt.
Eine Struktur ist endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Mächtigkeit
abzählbar

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Satz 8.6.
*Für jede Signatur σ ist die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen axiomatisierbar.*

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_n \iff |A| \geqslant n.$$

Somit gilt:

$$A \text{ ist unendlich} \iff \mathfrak{A} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Das heißt: Die Menge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ axiomatisiert die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen.

□

Im Folgenden zeigen wir, das die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen **nicht** axiomatisierbar ist.

Lemma 8.7. *Sei σ eine Signatur.*
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, für die Folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$ und eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|A| = m$ und $\mathfrak{A} \models \Phi$ (d.h. Φ besitzt beliebig mächtige endliche Modelle). Dann besitzt Φ auch ein unendliches Modell, d.h., es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $|B| = \infty$ und $\mathfrak{B} \models \Phi$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_n \ := \ \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j.$$

Sei $\Phi' := \Phi \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass jede **endliche** Teilmenge von Φ' ein Modell hat. Der Kompaktheitssatz liefert, dass auch Φ' ein Modell hat, d.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \Phi'$. Wegen $\mathfrak{B} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ muss $\mathfrak{B}$ unendlich sein.

□

Daraus folgt direkt:

Satz 8.8 (Nicht-Axiomatisierbarkeit der Endlichkeit).
Für jede Signatur σ gilt:

*(a) Die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen ist **nicht** axiomatisierbar.*

*(b) Die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen ist **nicht** endlich axiomatisierbar.*

Beweis:

(a) Folgt direkt aus Lemma 8.7.

(b) Folgt aus (a) und Korollar 8.4.

□

Auf ähnliche Weise kann man unter Verwendung des Kompaktheitssatzes auch Folgendes zeigen:

Satz 8.9 (Nicht-Axiomatisierbarkeit von Graph-Zusammenhang).
Die Klasse

$$\textsc{ZushGraphen} \ := \ \{\, G = (V, E^G) \ : \ V \textit{ ist eine Menge, } E^G \subseteq V \times V \textit{ und für alle } a, b \in V \textit{ gibt es in } E^G \textit{ einen Weg endlicher Länge von } a \textit{ nach } b \,\}$$

aller zusammenhängenden (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\psi_n(x,y)$ eine FO[σ]-Formel, die besagt, dass es einen Weg der Länge n von x nach y gibt. Das heißt:

$$\psi_0(x,y) \ := \ x{=}y, \qquad \text{und für alle } n \geqslant 1 \text{ ist}$$

$$\psi_n(x,y) \ := \ \exists x_0\, \exists x_1 \cdots \exists x_n \ \big(x_0{=}x \ \wedge \ x_n{=}y \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} E(x_{i-1}, x_i)\big).$$

Somit gilt für alle Graphen $G = (V, E^G)$, für alle $a, b \in V$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$G \models \psi_n[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt in } G \text{ einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b.$$

Also gilt auch:

Es gibt in G **keinen** Weg endlicher Länge von a nach b $\Longleftrightarrow$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $G \models \neg\psi[a,b]$.

Angenommen, die Klasse ZushGraphen wäre axiomatisierbar durch eine Menge Φ von FO[E]-Formeln.

Dann ist die Menge $\Psi := \Phi \cup \{\neg\psi_n : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ **unerfüllbar**.
Im Folgenden zeigen wir, dass jede **endliche** Teilmenge Γ von Ψ erfüllbar ist. Laut Kompaktheitssatz muss dann also auch Ψ erfüllbar sein. Widerspruch!

Sei also Γ eine endliche Teilmenge von Ψ. Sei $m := \max\{n \in \mathbb{N} : \neg\psi_n \in \Gamma\}$. Sei G_m der Graph, der aus einer ungerichteten Kette aus $m+2$ Knoten besteht, d.h. $G_m = (V, E^{G_m})$ mit $V := \{v_0, v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ und $E^{G_m} := \{(v_{i-1}, v_i),\ (v_i, v_{i-1}) : i \in \{1, \ldots, m+1\}\}$.

$$G_m \qquad \underset{v_0}{\bullet} \longleftrightarrow \underset{v_1}{\bullet} \longleftrightarrow \underset{v_2}{\bullet} \longleftrightarrow \cdots\cdots \longleftrightarrow \underset{v_m}{\bullet} \longleftrightarrow \underset{v_{m+1}}{\bullet}$$

Dann gilt:

(a) $G_m \models \Phi$, da G_m zusammenhängend ist.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leqslant m$ gilt: $G_m \models \neg\psi_n[v_0, v_{m+1}]$, da der kürzeste Weg von v_0 nach v_{m+1} in G_m die Länge $m+1$ hat.

Gemäß der Wahl von m gilt daher für die Belegung β mit $\beta(x) = v_0$ und $\beta(y) = v_{m+1}$:

$$(G_m, \beta) \models \Gamma.$$

Somit ist Γ erfüllbar.

$\square$

8.2 Der Satz von Löwenheim und Skolem

Satz 8.10 (Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei σ eine Signatur.*
Jede ***abzählbare****, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Beweis:
Sei Φ eine abzählbare, erfüllbare Menge von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln.
OBdA können wir annehmen, dass

(a) σ abzählbar ist (ansonsten ersetzen wir σ durch die Menge aller in Φ vorkommenden Symbole aus σ), und

(b) $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)$ unendlich ist $\big($ansonsten ersetzen wir — wie im Beweis von Lemma 7.41 — in Φ jede Variable v_i durch die Variable v_{2i} (für alle $i \in \mathbb{N}$)$\big)$.

Da Φ erfüllbar ist, ist Φ gemäß Vollständigkeitsatz auch widerspruchsfrei. Gemäß Lemma 7.39 und Lemma 7.40 gibt es daher eine widerspruchfreie, negationstreue Menge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält.
Gemäß Satz von Henkin (Satz 7.38) wird Θ von der reduzierten Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Theta] = \big([\mathfrak{A}_\Theta], [\beta_\Theta]\big)$ erfüllt. Gemäß Definition 7.35 ist die Mächtigkeit des Universums $[A_\Theta]$ höchstens so groß, wie die Mächtigkeit der Menge T_σ aller σ-Terme. Da σ-abzählbar ist, ist auch T_σ abzählbar. Somit ist $[\mathcal{I}_\Theta]$ ein abzählbares Modell von $\Theta \supseteq \Phi$.

$\square$

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 8.11. *Sei σ eine abzählbare Signatur.*
Dann ist die Klasse aller ***überabzählbaren*** *σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.*

Beweis:
Da σ abzählbar ist, ist auch die Menge $\mathrm{FO}[\sigma]$ abzählbar. Somit hat gemäß Satz von Löwenheim und Skolem jeder erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ein abzählbares Modell. $\square$

Bemerkung 8.12 (hier ohne Beweis)**.**

(a) Korollar 8.11 gilt sogar für **beliebige** Signaturen.

(b) Die Voraussetzung "Φ abzählbar" in Satz 8.10 ist wichtig (siehe Aufgabe 8.1).

Es sind verschiedene Varianten des Satzes Löwenheim und Skolem bekannt, die genauere Aussagen über die Mächtigkeit von Modellen machen (hier ohne Beweis):

Satz 8.13 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine erfüllbare, unendliche Formelmenge. Dann besitzt Φ ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß wie die Mächtigkeit von Φ ist.

Satz 8.14 (Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.**
*Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu **jeder** Menge M ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß wie die Mächtigkeit von M ist.*

Für Beweise der beiden Sätze sei auf [EFT07] verwiesen.

8.3 Elementare Äquivalenz und Nichtstandardmodelle

Definition 8.15. Sei σ eine Signatur.

elementar äquivalent
$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
Theorie
$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen **elementar äquivalent** (kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn sie dieselben $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze erfüllen (d.h.: Für jeden $\mathrm{FO}[\sigma]$-Satz φ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$).

(b) Die **Theorie** $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Menge aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze, die $\mathfrak{A}$ erfüllt. D.h.:

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \; := \; \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathfrak{A} \models \varphi\}.$$

Klar:

- Für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätze φ und alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt: entweder $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ oder $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.
- Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

Daraus folgt direkt:

Korollar 8.16. *Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$).*

Bemerkung 8.17. Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist offensichtlich. Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt für **endliche** σ aus Aufgabe 1.3 und für **unendliche** σ aus Aufgabe 8.2.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, aber $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{A}$.

Dies folgt leicht aus dem Aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem. Details: Übung (siehe Aufgabe 8.2).

Beispiel 8.18 (Nichtstandardmodell von $\mathcal{N}_{\leqslant}$).
Sei $\mathcal{N}_{\leqslant} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$. Gemäß Bemerkung 8.17(b) gibt es eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathfrak{B}$, die nicht isomorph zu $\mathcal{N}_{\leqslant}$ ist. Eine solche Struktur $\mathfrak{B}$ wird **Nichtstandardmodell von** $\mathcal{N}_{\leqslant}$ genannt.

Frage: Wie sieht $\mathfrak{B}$ aus?

Wir wissen, dass $\mathcal{N}_{\leqslant} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathfrak{A}})$ eine **diskrete lineare Ordnung** ist, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt. Der Begriff "diskrete lineare Ordnung" ist dabei wie folgt definiert: Eine lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, \leqslant^{\mathfrak{A}})$ heißt **diskret**, wenn für jedes $a \in A$ folgendes gilt: diskrete lineare Ordnung

- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt größer als a ist (d.h. $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathfrak{A}} b$), so gibt es auch ein **kleinstes** Element, das echt größer als a ist (d.h. ein a' mit $a' \neq a$ und $a \leqslant^{\mathfrak{A}} a'$ und $a' \leqslant^{\mathfrak{A}} b$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathfrak{A}} b$). Dieses Element wird **Nachfolger** von A bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ genannt.
- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt kleiner als a ist (d.h. $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathfrak{A}} a$), so gibt es auch ein **größtes** Element, das echt kleiner als a ist (d.h., ein a' mit $a' \neq a$ und $a' \leqslant^{\mathfrak{A}} a$ und $b \leqslant^{\mathfrak{A}} a'$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathfrak{A}} a$). Dieses Element wird **Vorgänger** von a bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{A}}$ genannt.

Man sieht leicht, dass es einen FO[$\leqslant$]-Satz δ gibt, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt (Details: Übung):

$$\mathfrak{A} \models \delta \quad \iff \quad \text{$\mathfrak{A}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.}$$

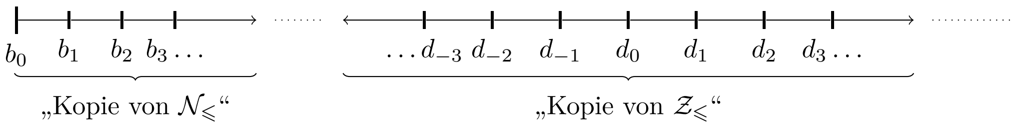
Wegen $\mathcal{N}_{\leqslant} \models \delta$ und $\mathfrak{B} \equiv \mathcal{N}_{\leqslant}$ gilt auch $\mathfrak{B} \models \delta$. Somit ist $\mathfrak{B}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.
Sei $b_0 \in B$ das kleinste Element bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{B}}$. Da $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ diskret ist und kein größtes Element besitzt, muss es einen Nachfolger (bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{B}}$) b_1 von b_0 geben, und es muss für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $b_n \in B$ geben, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: b_{n+1} ist der Nachfolger von b_n (bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{B}}$).
Sei $B' := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Klar: $B' \subseteq B$, und $\mathfrak{B}_{|B'} \cong \mathcal{N}_{\leqslant}$. Wegen $\mathfrak{B} \not\cong \mathcal{N}_{\leqslant}$ muss also gelten: $B' \subsetneq B$, das heißt, es es gibt ein $d_0 \in B \setminus B'$.
Da $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ eine diskrete lineare Ordnung ohne größtes Element ist, gilt außerdem Folgendes:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n \leqslant^{\mathfrak{B}} d_0$ (und $b_n \neq d_0$).
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein $d_n \in B$, so dass d_{n+1} der Nachfolger von d_n bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ ist.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt es ein $d_{-n} \in B$, so dass $d_{-(n+1)}$ der Vorgänger von d_{-n} bzgl. $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ ist.
- Für alle $d \in \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b_n \leqslant d$ und $b_n \neq d$.

Insgesamt gilt für $B'' := \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathfrak{B}_{|B''} \;\cong\; \mathcal{Z}_{\leqslant} := (\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}}),$$

und $\mathfrak{B}_{|B' \cup B''}$ sieht folgendermaßen aus:



Außerdem muss für alle $c \in B \setminus (B' \cup B'')$ gelten:

- $b_n \leqslant c$, für alle $n \in \mathbb{N}$,
- es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $d_i \leqslant c \iff$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $d_i \leqslant c$.

Sei nun $\pi : B \to B$ die Abbildung mit

- $\pi_{|B \setminus B''} := \mathrm{id}_{|B \setminus B''}$ (das heißt $\pi(c) = c$, für alle $c \in B \setminus B''$)
- $\pi(d_i) := d_{i+1}$, für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Man sieht leicht, dass π ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$ ist, d.h., $\pi(B) = B$ und $\pi(\leqslant^{\mathfrak{B}}) = \leqslant^{\mathfrak{B}}$.

Beispiel 8.19.
Wir nutzen die Erkenntnisse aus Beispiel 8.18 nun, um einen alternativen Beweis von Satz 4.18:

> "Die Klasse der endlichen linearen Ordnungen gerader Kardinalität (GeradeEndlLinOrd) ist nicht FO-definierbar in der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen (EndlLinOrd)."

anzugeben, der nicht auf Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen beruht.[1]

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, GeradeEndlLinOrd wäre FO-definierbar in EndlLinOrd durch einen FO[$\leqslant$]-Satz φ. Sei x eine Variable, die nicht in φ vorkommt, und sei $\tilde{\varphi}(x)$ die Formel, die aus φ entsteht, indem jeder Quantor eingeschränkt wird auf Elemente $< x$. D.h.: Jede Teilformel der Form $\exists y\, \psi$ (bzw. $\forall y\, \psi$) wird ersetzt durch die Formel $\exists y\, (y \leqslant x\ \wedge \neg y{=}x\ \wedge \psi)$ (bzw. $\forall y\, \big((y \leqslant x\ \wedge\ \neg y{=}x) \to \psi)\big)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\leqslant \models \tilde{\varphi}[n] \quad &\iff \quad \big(\{0,\dots,n-1\}, \leqslant^{\mathcal{N}}_{|\{0,\dots,n-1\}}\big) \models \varphi \\ &\iff \quad n \text{ ist gerade} \quad (\text{denn } \varphi \text{ definiert GeradeEndlLinOrd auf EndlLinOrd}).\end{aligned}$$

Für den FO[$\leqslant$]-Satz

$$\psi \ := \ \forall u \forall v \, \Big(\varphi_{\mathrm{Succ}}(u,v) \to \big(\tilde{\varphi}(u) \ \leftrightarrow \ \neg\tilde{\varphi}(v)\big)\Big),$$

wobei $\varphi_{\mathrm{Succ}}(u,v)$ ausdrückt, dass v der unmittelbare Nachfolger von u bzgl. $\leqslant$ ist, gilt dann offensichtlicherweise:

$$\mathcal{N}_\leqslant \ \models \ \psi.$$

Sei $\mathfrak{B}$ die Struktur aus Beispiel 8.18. Wegen $\mathfrak{B} \equiv \mathcal{N}_\leqslant$ gilt dann auch: $\mathfrak{B} \models \psi$. Seien $d_0, d_1 \in B$ wie in Beispiel 8.18 gewählt. Wegen $\mathfrak{B} \models \psi$ gilt dann insbesondere

$$\mathfrak{B} \ \models \ \tilde{\varphi}[d_0] \quad \iff \quad \mathfrak{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1].$$

Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass

$$\mathfrak{B} \ \models \ \tilde{\varphi}[d_0] \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1] \tag{8.1}$$

[1] Der hier vorgestellte Beweis ist von Martin Otto [Ott11].

(der andere Fall kann analog behandelt werden).

Sei nun π der Isomorphismus aus Beispiel 8.18 mit $\pi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$. Gemäß Isomorphielemma (Korollar 1.36) folgt aus (8.1), dass $\pi(\mathfrak{B}) \models \tilde{\varphi}[\pi(d_0)]$. Wegen $\pi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ und $\pi(d_0) = d_1$ (vgl. Beispiel 8.18) gilt also: $\mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[d_1]$. Dies ist ein Widerspruch zu (8.1), da $\mathfrak{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1]$. $\square$

Zur Erinnerung (Standardmodell der Arithmetik):

- $\sigma_{\text{Ar}} = \{ \leqslant, +, \times, 0, 1 \}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist, $+$ und $\times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 zwei Konstantensymbole sind.
- Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} \ := \ \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\right),$$

  wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind, und $0^{\mathcal{N}}$, $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 und 1 sind.

Definition 8.20. Ein **Nichtstandardmodell der Arithmetik** ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht-isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

Nichtstandardmodell der Arithmetik

Aus Bemerkung 8.17 (b) folgt direkt, dass es Nichtstandardmodelle der Arithmetik gibt. Gemäß dem folgenden Satz gibt es sogar ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Satz 8.21 (Der Satz von Skolem).
Es gibt ein abzählbares Nichstandardmodell der Arithmetik.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n}$ der folgendermaßen induktiv definierte σ_{Ar}-Term:

$$\underline{0} \ := \ 0, \quad \text{und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ sei} \quad \underline{n{+}1} \ := \ \underline{n} + 1.$$

In $\mathcal{N}$ wertet sich der Term $\underline{n}$ zur Zahl n aus, d.h. es gilt $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\Phi \quad := \quad \text{Th}(\mathcal{N}) \ \cup \ \{ \neg\, x{=}\underline{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \}.$$

Dann ist jede **endliche** Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ erfüllbar — z.B. durch die Interpretation $(\mathcal{N}, \beta)$ mit $\beta(x) := m{+}1$, wobei $m := \max\{n \in \mathbb{N} : \neg\, x{=}\underline{n} \ \in \Gamma\}$. Gemäß Kompaktheitssatz ist daher auch Φ erfüllbar. Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein abzählbares Modell (beachte dazu: Φ ist abzählbar, da es nur abzählbar viele FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln gibt).
Sei $\mathcal{I} = (\mathfrak{B}, \beta)$ ein abzählbares Modell von Φ. Dann ist $\mathfrak{B} \equiv \mathcal{N}$, denn für jeden FO$[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ gilt:

- Falls $\mathcal{N} \models \varphi$, so $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathfrak{B} \models \varphi$.
- Falls $\mathcal{N} \not\models \varphi$, so $\mathcal{N} \models \neg\varphi$, also $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ und somit $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

Im Folgenden zeigen wir noch, dass $\mathfrak{B} \not\cong \mathcal{N}$. Angenommen, $\mathfrak{B} \cong \mathcal{N}$. Dann gibt es einen Isomorphismus π von $\mathcal{N}$ nach $\mathfrak{B}$. Gemäß Isomorphielemma (siehe Behauptung 1 im Beweis von Satz 1.36) gilt für jeden der σ_{Ar}-Terme $\underline{n}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$), dass

$$\pi\left(\underline{n}^{\mathcal{N}}\right) = \underline{n}^{\mathfrak{B}}.$$

Wegen $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$ gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\pi(n) = \underline{n}^{\mathfrak{B}}.$$

Da π ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathfrak{B}$ ist, gilt

$$B \;=\; \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}\} \;=\; \{\underline{n}^{\mathfrak{B}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt für die Belegung β und die Variable x, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta(x) = \underline{n}^{\mathfrak{B}}$. Somit gilt: $\mathcal{I} = (\mathfrak{B}, \beta) \models x{=}\underline{n}$. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ ist, da Φ die Formel $\neg\, x{=}\underline{n}$ enthält. $\square$

Frage: Wie sieht ein Nichtstandardmodell der Arithmetik aus?

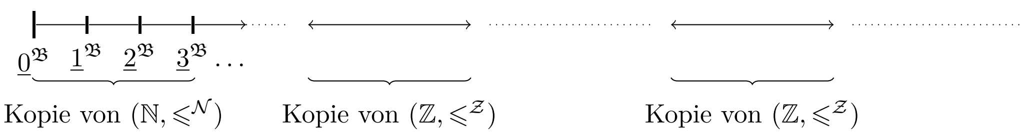
Antwort: Sei $\mathfrak{B}$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik, d.h.: $\mathfrak{B} \equiv \mathcal{N}$ und $\mathfrak{B} \ncong \mathcal{N}$. Dann gilt:

- $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ ist eine diskrete lineare Ordnung auf B, die ein kleinstes aber kein größtes Element besitzt,
- $0^{\mathfrak{B}}$ ist das kleinste Element dieser linearen Ordnung,

(denn: jede dieser Aussagen lässt sich durch einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz beschreiben, der von $\mathcal{N}$ erfüllt wird). Außerdem erfüllt $\mathfrak{B}$ die folgenden Sätze aus $\text{Th}(\mathcal{N})$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n}$ dabei der im Beweis von Satz 8.21 definierte σ_{Ar}-Term):

- $\forall x\ \underline{0} \leqslant x$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} \leqslant x)$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} = x \;\vee\; \underline{2} \leqslant x)$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x \;\vee\; \underline{1} = x \;\vee\; \underline{2} = x \;\vee\; \underline{3} \leqslant x)$,
- usw.

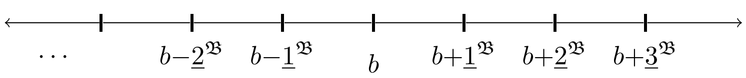
Die Ordnung $\leqslant^{\mathfrak{B}}$ besteht damit aus einer Kopie von $(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, gefolgt von Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.



Außerdem erfüllt $\mathfrak{B}$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die beiden folgenden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Sätze, die zu $\text{Th}(\mathcal{N})$ gehören:

- $\underline{m} + \underline{n} \;=\; \underline{m{+}n}$,
- $\underline{m} \times \underline{n} \;=\; \underline{m \cdot n}$.

Daraus folgt, dass $\mathcal{N}$ isormorph ist zu der Einschränkung von $\mathfrak{B}$ auf die Menge $\{\underline{n}^{\mathfrak{B}} : n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem gilt: Ist $b \in B$ ein Element, das in einer der Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegt, so sieht diese Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ folgendermaßen aus:



Daher gilt: das Element $(b +^{\mathfrak{B}} b)$ muss in einer **anderen** Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ liegen. Analog folgt: für jedes $b^{(i)} := \underbrace{b +^{\mathfrak{B}} \ldots +^{\mathfrak{B}} b}_{i\text{-mal, für } i \in \mathbb{N}_{>0}}$ muss es eine neue Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ geben.

Man kann auch zeigen, dass zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ in $\mathfrak{B}$ eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ liegen muss.

8.4 Literaturhinweise

Zur weiterführenden Lektür werden das Kapitel 6 in [EFT07], sowie der Artikel [Ott11] von Martin Otto empfohlen.

8.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1.
Sei $\sigma := \{c_r : r \in \mathbb{R}\}$ eine Signatur, die aus überabzählbar vielen Konstantensymbolen besteht. Finden Sie eine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, die erfüllbar ist, aber kein abzählbares Modell besitzt.

Aufgabe 8.2.
Beweisen Sie Bemerkung 8.12, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$: $\quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \ncong \mathfrak{A}$.

Hinweis: Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 1.3, um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.

Aufgabe 8.3.
Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

Aufgabe 8.4.
Geben Sie einen $\mathrm{FO}[\leqslant]$-Satz δ an, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$\mathfrak{A} \models \delta \quad \iff \quad$ $\mathfrak{A}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.

Aufgabe 8.5.
Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, und sei $\mathfrak{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \ := \ \big(\{0\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\{1\} \times \mathbb{Z}\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathfrak{B}} \ := \ \{\big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \ : \ i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big)\}.$$

Sind die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.
Hinweis: Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele benutzen.

Aufgabe 8.6.
Sei $\mathfrak{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.
Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathfrak{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.