3 Die Auswertungskomplexität von FO in endlichen Strukturen

3.1 Die Auswertung von FO-Formeln

Definition 3.1.
Eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ heißt **endlich**, wenn ihr Universium A nur endlich viele Elemente enthält. endliche σ-Struktur

Sei σ eine endliche **relationale** Signatur (d.h. σ besteht aus endlich vielen Relationssymbolen). Als Eingabe für Algorithmen repräsentieren wir eine endliche σ-Struktur wie folgt:

- Die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ repräsentieren wir durch Objekte eines geeigneten Datentyps Θ (etwa **integer** oder **string**). Das Universum A von $\mathfrak{A}$ wird dann als Liste von Objekten vom Typ Θ repräsentiert.
- Ein r-Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in A^r$ repräsentieren wir als Liste von Objekten vom Typ Θ. Für jedes $R \in \sigma$ repräsentieren wir die Relation $R^{\mathfrak{A}}$ dann als Liste aller r-Tupel $(a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}}$ $\big($für $r := \mathrm{ar}(R)\big)$.

Man beachte, dass die Repräsentation von $\mathfrak{A}$ dann ungefähr die Größe

$$|\sigma| \ + \ |A| \ + \ \sum_{R\in\sigma} |R^{\mathfrak{A}}| \cdot \mathrm{ar}(R)$$

hat.

Definition 3.2.
Sei σ eine endliche relationale Signatur.

(a) Die Größe $\|\mathfrak{A}\|$ einer endlichen σ-Struktur ist definiert als

$$\|\mathfrak{A}\| \ := \ |\sigma| \ + \ |A| \ + \ \sum_{R\in\sigma} |R^{\mathfrak{A}}| \cdot \mathrm{ar}(R).$$

(b) Die **Länge** (bzw. **Größe**) $\|\varphi\|$ einer FO$[\sigma]$-Formel φ ist die Länge von φ, betrachtet als Wort über dem Alphabet A_σ (siehe Definitionen 1.13, 1.14, 1.16). Länge Größe

Definition 3.3.

(a) FIN_σ bezeichnet die Klasse aller endlichen σ-Strukturen. FIN_σ

(b) FIN bezeichnet die Klasse aller endlichen σ-Strukturen, für alle endlichen relationalen Signaturen σ. FIN

Unsere bisherige Sichtweise auf die Semantik der Logik erster Stufe war, dass FO$[\sigma]$-Formeln in σ-Interpretationen ausgewertet werden, so dass für jede FO$[\sigma]$-Formel φ und jede zu φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\text{entweder} \quad \mathcal{I} \models \varphi \quad \text{oder} \quad \mathcal{I} \not\models \varphi.$$

Eine alternative Sichtweise ist, dass Formeln Relationen in Strukturen definieren:

Definition 3.4.
Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, alle FO[σ]-Formeln φ und alle Tupel $(x_1, \ldots, x_k) \in \text{Var}^k$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ ist

$$\varphi(\mathfrak{A}) \;:=\; \big\{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k]\big\}$$

die von φ in $\mathfrak{A}$ definierte k-stellige Relation.

Vorsicht: Die Relation $\varphi(\mathfrak{A})$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch von dem Tupel $(x_1, \ldots, x_k) \in \text{Var}^k$. Wenn wir die Notation $\varphi(\mathfrak{A})$ verwenden, müssen wir daher immer vorher angeben, auf welche Variablen(reihenfolge) sie sich bezieht.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden nur FO[σ]-Formeln, in denen keins der Symbole $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ vorkommt (gemäß Beobachtung 2.2 ist dies keine wirkliche Einschränkung).

Beobachtung 3.5.
Ist σ eine relationale Signatur und $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, so können wir für FO[σ]-Formeln φ und Variablentupel $(x_1, \ldots, x_k) \in \text{Var}^k$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ die Relation $\varphi(\mathfrak{A}) \subseteq A^k$ rekursiv wir folgt beschreiben:

- Falls φ von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$, für $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, k\}$, ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) \;=\; \big\{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : a_{i_1} = a_{i_2}\big\}.$$
- Falls φ von der Form $R(x_{i1}, \ldots, x_{ir})$ für $R \in \sigma$, $r := \text{ar}(R)$ und $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, k\}$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) \;=\; \big\{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : (a_{i1}, \ldots, a_{ir}) \in R^{\mathfrak{A}}\big\}.$$
- Falls φ von der Form $\neg\varphi_1$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) \;=\; A^k \setminus \varphi_1(\mathfrak{A}).$$
- Falls φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) \;=\; \varphi_1(\mathfrak{A}) \cup \varphi_2(\mathfrak{A}).$$
- Falls φ von der Form $\exists x_{k+1}\, \varphi_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ ist, so ist
$$\varphi(\mathfrak{A}) \;=\; \big\{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : \text{es gibt ein } a_{k+1} \in A, \text{ s.d. } (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) \in \varphi_1(\mathfrak{A})\big\}.$$

Definition 3.6.
Auswertungs-
problem

Das **Auswertungsproblem** der Logik erster Stufe auf der Klasse aller endlichen relationalen Strukturen ist wie folgt definiert:

Auswertungsproblem für FO auf FIN

Eingabe: Eine endliche σ-Struktur $\mathfrak{A}$, wobei σ eine endliche relationale Signatur ist, und eine FO[σ]-Formel φ.

Ziel: Berechne $\varphi(\mathfrak{A})$ $\big($bzgl. des Variablentupels $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\text{frei}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $k = \big|\,\text{frei}(\varphi)\big|\big)$.

Beobachtung 3.5 führt unmittelbar zu einem rekursiven Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO auf FIN löst. Die genaue Laufzeit des Algorithmus hängt von dem folgenden Parameter ab:

Definition 3.7.
Die **Breite** (engl. **width**) $\operatorname{br}(\varphi)$ einer $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ ist die maximale Anzahl freier Variablen in Subformeln von φ, d.h. Breite $\operatorname{br}(\varphi)$

$$\operatorname{br}(\varphi) \;=\; \max\Big\{\big|\operatorname{frei}(\psi)\big| : \psi \in \operatorname{sub}(\varphi)\Big\}.$$

$\big($vergleiche Definition 1.19: $\operatorname{sub}(\varphi)$ ist die Menge aller Subformeln von φ; beachte: $\varphi \in \operatorname{sub}(\varphi)\big)$.

Beobachtung 3.8.

(a) $\operatorname{br}(\varphi) \leqslant \|\varphi\|$

(b) $\operatorname{br}(\varphi) \leqslant \big|\{x \in \mathrm{Var} : x \text{ kommt in } \varphi \text{ vor }\}\big|$

(c) Für jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ gibt es eine zu φ äquivalente $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel $\widetilde{\varphi}$ mit $\operatorname{frei}(\widetilde{\varphi}) = \operatorname{frei}(\varphi)$, in der höchstens $\operatorname{br}(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.

Beweis: Übung.

$\square$

Satz 3.9.
Es gibt einen Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO *auf* FIN *bei Eingabe einer Struktur* $\mathfrak{A}$ *und einer Formel* φ *in Zeit* $O\big(\|\varphi\| \cdot \|\mathfrak{A}\|^{\operatorname{br}(\varphi)} \cdot \operatorname{br}(\varphi) \;+\; \|\varphi\| \;+\; \|\mathfrak{A}\|\big)$ *löst.*

Beweis:
Durch geschickte Implementierung des rekursiven Algorithmus, der sich aus Beobachtung 3.5 ergibt (beachte dabei: $\big|\operatorname{sub}(\varphi)\big| \leqslant \|\varphi\|$). Details: Übung

$\square$

Satz 3.10.
Das Auswertungsproblem für FO *auf* FIN *ist vollständig für die Komplexitätsklasse* PSPACE *aller auf polynomiellem Platz lösbaren Probleme.*

Hier ohne Beweis. Ein Beweis dieses Satzes wird in der Vorlesung „Logik und Datenbanken“ gegeben.

3.2 Literaturhinweise

Als weitere Lektüre werden die Kapitel 4.2 und 4.3 in [FG06], sowie 6.1 und 6.2 in [Lib04] empfohlen.

3.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1.
Sei σ eine relationale Signatur.
Zeigen Sie, dass es für jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ eine zu φ äquivalente $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel $\tilde{\varphi}$ mit $\operatorname{frei}(\tilde{\varphi}) = \operatorname{frei}(\varphi)$ gibt, in der höchstens $br(\varphi)$ viele verschiedene Variablen vorkommen.

Aufgabe 3.2.
Arbeiten Sie die Details des Beweises von Satz 3.9 aus und geben Sie eine detaillierte Analyse des Zeit- und Platzbedarfs Ihres Algorithmus an.