Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. Oktober 2026

Logik in der Informatik

Wintersemester 2026/2027

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 9. November 2026, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 3 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Definieren Sie einen zur Implikation dualen Junktor $\rightsquigarrow$, d. h. für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ soll gelten:

$$[\![(\,\widetilde{\varphi} \rightsquigarrow \widetilde{\psi}\,)]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![(\,\varphi \to \psi\,)]\!]^{\widetilde{\mathcal{I}}}\,.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.27) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikation formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d. h. die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF und die Aufgabe ist, zu entscheiden, ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$, in der keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn φ nicht allgemeingültig ist, dann ist $\widetilde{\varphi}$ erfüllbar.

(b) Geben Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\vee, \mathbf{1}\}$ und $\tau_2 := \{\neg, \to\}$ an, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.33). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Betrachten Sie die beiden Formeln

$$\varphi \;:=\; \Big(\big(\neg A_3 \vee (A_2 \vee \neg A_1)\big) \wedge (\neg A_3 \vee A_0)\Big) \quad \text{und}$$
$$\psi \;:=\; \Big(\neg A_3 \vee \big((\neg A_2 \to \neg A_1) \wedge A_0\big)\Big)\,.$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.39 und 2.43 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe), welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter

`https:/hu.berlin/Prolog`

Tom ist genervt. Ständig verliert er gegen Jerry im Schere-Stein-Papier-Spiel, was die Maus zum Anlass nimmt, ihn auszulachen. Er hat gelesen, dass viele Gewinner auf psychologische Tricks vertrauen und so die Wahl des Gegners beeinflussen. Also beschließt Tom, sich vor jeder Partie einen Spielplan zu erstellen und während der Partie nicht davon abzuweichen. Zu diesem Zweck und für tiefergehende Berechnungen repräsentiert er Spielpläne durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term

$$t \;:=\; \texttt{stein(schere(papier(schere(start))))}$$

den Spielplan für eine Partie von vier Runden, bei der Tom in der ersten Runde *Schere* wählt, in der zweiten *Papier*, um danach wieder *Schere* und schlussendlich *Stein* zu wählen.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `spielplan/1`, so dass `spielplan(X)` für einen beliebigen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Spielplan für das Schere-Stein-Papier-Spiel repräsentiert. Beispielsweise sollte das Ziel `spielplan(`t`)` erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel `spielplan(f(42,73))`.

(b) Jerry findet die Idee, Prolog zu nutzen, natürlich hervorragend. Die beiden beschließen, zukünftig das schweißtreibende und gelenkverschleißende Spiel einer unparteiischen Prolog-Implementierung zu überlassen. Schreiben Sie dafür ein Prädikat `tomWins/2`, so dass `tomWins(X,Y)`, für zwei Spielpläne `X` (von Tom) und `Y` (von Jerry) wahr ist, falls beides Pläne derselben Rundenzahl sind und nach einer solchen Partie Tom gewonnen hat, d. h. die Anzahl der durch Tom gewonnenen Runden größer ist als die Anzahl der Runden, die Jerry in dieser Partie gewinnt.

Vorgehen: Definieren Sie hierfür ein Hilfsprädikat `tomWins(X,Y,U,V)`, das genau dann für zwei Spielpläne `X` und `Y` gilt, falls `U` als Unärzahl[1] der Anzahl der gewonnen Runden im

[1] Analog zum Buch mittels `0` und `succ`.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Spiel `X` vs. `Y` entspricht und `V` unär der Anzahl der gewonnen Runden von `Y`. Nutzen Sie weiterhin ein selbstdefiniertes Prädikat `greater/2` um die zwei Unärzahlen zu vergleichen.

Zur Erinnerung: Im Schema finden sich die Spielregeln, nach denen sich der Gewinner ermitteln lässt.

	Schere	*Stein*	*Papier*
Schere	*Schere*	*Stein*	*Schere*
Stein	*Stein*	*Stein*	*Papier*
Papier	*Schere*	*Papier*	*Papier*