Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. Januar 2026

Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 13

Abgabe: *bis 2. Februar 2026, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 13 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

(a) Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol, f ein 1-stelliges Funktionssymbol und seien c und d Konstantensymbole.

Im Folgenden ist für jedes $i \in \{1, 2\}$ eine Signatur σ_i und ein $\mathsf{FO}[\sigma_i]$-Satz φ_i gegeben.

(i) Sei $\sigma_1 := \{R, f, c\}$ und sei φ_1 der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_1]$-Satz:

$$\forall x \forall y \Big(\big(R(x,y) \ \rightarrow \ y{=}f(x) \big) \ \wedge \ \big(y{=}f(x) \ \rightarrow \ R(x,y) \big) \Big)$$

(ii) Sei $\sigma_2 := \{R, c, d\}$ und sei φ_2 der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_2]$-Satz:

$$\exists x \exists y \big(R(x,d) \ \wedge \ R(c,y) \big) \ \wedge \ \forall x \forall y \big(R(x,y) \ \rightarrow \ \neg\, x{=}y \big)$$

Geben Sie für jedes $i \in \{1,2\}$ eine σ_i-Herbrandstruktur $\mathcal{A}_i$ und eine σ_i-Herbrandstruktur $\mathcal{B}_i$ an, sodass gilt:

$$\mathcal{A}_i \models \varphi_i \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}_i \not\models \varphi_i.$$

Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{A}_i \models \varphi_i$ bzw. $\mathcal{B}_i \not\models \varphi_i$ gilt.

(b) Betrachten Sie das folgende Logik-Programm Π.[1]

```
weißer_zauberer(gandalf).
freund(frodo,sam).
unterstützt(saruman,sauron).
unterstützt(X,frodo) :- weißer_zauberer(X).
unterstützt(X,frodo) :- freund(frodo,X).
ringgemeinschaft(aragorn).
ringgemeinschaft(X) :- unterstützt(X, frodo).
ringträger(frodo).
saurons_feind(X) :- ringträger(X).
saurons_feind(X) :- ringgemeinschaft(X).
```

(i) Geben Sie einen Beweisbaum für den Term `saurons_feind(gandalf)` aus Π an.

(ii) Geben Sie die Bedeutung $\mathcal{B}(\Pi)$ des Logik-Programms Π an.

[1] Sie haben es bereits als Prolog-Programm auf Blatt 1 kennengelernt.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

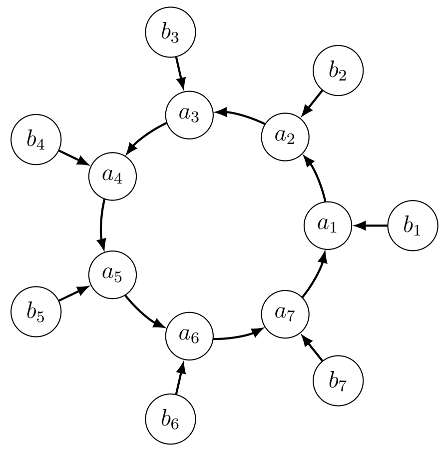
Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Definition: Für eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sagen wir, dass $\mathcal{A}$ *eine Krone der Länge n besitzt*, wenn es Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ mit $|\{ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \}| = 2n$ gibt, sodass die Relation $E^{\mathcal{A}}$ die folgenden Kanten enthält:

- (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in \{1, \ldots, n{-}1\}$ und (a_n, a_1) und
- (b_i, a_i) für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Eine Krone der Länge 7 sieht zum Beispiel wie folgt aus:



(i) Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ_n an, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_n \iff \mathcal{A}$ enthält eine Krone der Länge n.

(ii) Geben Sie eine Menge Ψ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen an, die die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ axiomatisiert, die für alle $n \geq 2$ keine Krone der Länge n besitzen.

(iii) Verwenden Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um Folgendes zu beweisen: Die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, die eine Krone der Länge ≥ 2 besitzen, ist *nicht* erststufig axiomatisierbar. Präzise: Zeigen Sie, dass es keine Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, sodass für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi \quad \iff \quad \begin{array}{l}\text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2, \text{ sodass } \mathcal{A} \text{ eine} \\ \text{Krone der Länge } n \text{ besitzt.}\end{array}$$

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 4.35 im Vorlesungsskript.

(b) Sei $\sigma_2 = \{R, c, d\}$ die Signatur aus Aufgabe **2(a)** mit dem 2-stelligen Relationssymbol R und den Konstantensymbolen c und d. Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen:

(i) Wie sieht das Universum einer konkreten σ_2-Herbrandstruktur aus?

(ii) Wie viele σ_2-Herbrandstrukturen gibt es?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{ R, f \}$, wobei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Überführen Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\forall x \, \neg\Big(\neg f(x){=}y \quad \vee \quad \forall y \, R(x, y) \Big)$$

in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten, gleichheitsfreien $\mathsf{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform. Gehen Sie dabei vor wie im Beweis von Satz 4.52 im Vorlesungsskript. Geben Sie insbesondere auch die Signatur $\hat{\sigma}$ sowie die Formeln an, die nach jedem der Schritte 1, 2 und 3 des Beweises entstehen.