Logik in der Informatik

Wintersemester 2025/2026

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 15. Dezember 2025, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 8 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

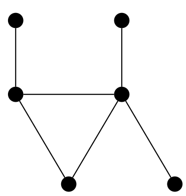
(a) Sei $\sigma := \{\, E, f \,\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht?

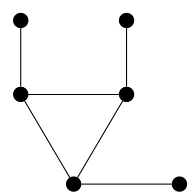
(i) $\forall x\, \exists y\; f(y) = x \quad \equiv \quad \exists y\, \forall x\; f(y) = x$

(ii) $\forall x\, \forall y \left(\neg f(x) = y \;\rightarrow\; E(y,x) \right) \quad \equiv \quad \forall y\, \forall x \left(\neg E(y,x) \;\rightarrow\; f(x) = y \right)$

(iii) $\exists x\, \exists y\; f(x) = y \quad \equiv \quad \forall x\, \exists y \Big((\, x = y \,\vee\, E(x,y)\,) \;\rightarrow\; \exists z\, (\, z = y \,\vee\, E(z,y)\,)\Big)$

(b) In der folgenden Darstellung der Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten u und v die beiden gerichteten Kanten (u,v) und (v,u):

$\mathcal{A}$: 

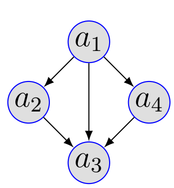
$\mathcal{B}$: 

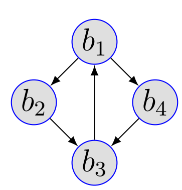
(i) Beschreiben Sie eine Gewinnstrategie für Duplicator im 2-Runden-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel (EF-Spiel) auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(ii) Welches ist das kleinste $m \in \mathbb{N}$, sodass Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden-EF-Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden-EF-Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m{-}1)$-Runden-EF-Spiel beschreiben.

(iii) Geben Sie für Ihre Zahl m aus **(ii)** einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe m an, sodass gilt: $\quad \mathcal{A} \models \varphi \quad$ und $\quad \mathcal{B} \not\models \varphi$.

(c) Sei $\sigma := \{\, E \,\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie die σ-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$, die durch die beiden gerichteten Graphen in der unten angegebenen Abbildung repräsentiert werden.

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ an, für den gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.
Begründen Sie, warum φ von $\mathcal{A}$ erfüllt wird, aber nicht von $\mathcal{B}$.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung und die folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ_1, φ_2 und φ_3. Berechnen Sie die Relationen $[\![\varphi_1(x_\mathrm{K}, x_\mathrm{Z})]\!]^\mathcal{D}$, $[\![\varphi_2(x_\mathrm{T})]\!]^\mathcal{D}$, $[\![\varphi_3(x_\mathrm{K})]\!]^\mathcal{D}$ und beschreiben Sie umgangssprachlich für jede der drei Formeln, welche Anfrage sie beschreibt.

(i) $\varphi_1(x_\mathrm{K}, x_\mathrm{Z}) \;:=\; R_\mathrm{Prog}(x_\mathrm{K}, \text{‘Alien’}, x_\mathrm{Z})$

(ii) $\varphi_2(x_\mathrm{T}) \;:=\; \big(\exists x_\mathrm{Z}\, R_\mathrm{Prog}(\text{‘Babylon’}, x_\mathrm{T}, x_\mathrm{Z}) \;\wedge\; \neg\exists x_\mathrm{Z}\, R_\mathrm{Prog}(\text{‘Casablanca’}, x_\mathrm{T}, x_\mathrm{Z})\big)$

(iii) $$\varphi_3(x_\mathrm{K}) \;:=\; \Big(\exists x_\mathrm{T}\, \exists x_\mathrm{Z}\, R_\mathrm{Prog}(x_\mathrm{K}, x_\mathrm{T}, x_\mathrm{Z}) \;\wedge\; \forall y_\mathrm{T} \forall y_\mathrm{Z} \Big(R_\mathrm{Prog}(x_\mathrm{K}, y_\mathrm{T}, y_\mathrm{Z}) \;\to\; \neg\exists x_\mathrm{S} \exists x_\mathrm{R} \big(R_\mathrm{Film}(y_\mathrm{T}, x_\mathrm{R}, x_\mathrm{S}) \;\wedge\; (x_\mathrm{S}{=}\text{‘George Clooney’} \;\vee\; x_\mathrm{R}{=}\text{‘George Clooney’})\big)\Big)\Big)$$

(b) Sei $\sigma := \{\, R, f, c \,\}$ die Signatur mit dem 3-stelligen Relationssymbol R, dem 1-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c. Betrachten Sie den $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz

$$\varphi \;:=\; \forall x \exists y \Big(\big(\neg\, f(y){=}f(x) \;\leftrightarrow\; R(x,y,c)\big) \;\wedge\; f(f(y)) = x\Big)\,.$$

Geben Sie zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ an, deren Universum jeweils aus höchstens vier Elementen besteht, sodass gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$.
Begründen Sie, warum φ von $\mathcal{A}$ erfüllt wird, aber nicht von $\mathcal{B}$.

(c) **(i)** Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Terme (Satz 3.27) per Induktion über den Aufbau von Termen.

(ii) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Satz 3.28) per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 10 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) handschriftlich an und reichen Sie diese im PDF-Format in Moodle ein. Die Lösung der Aufgabenteile (b), (c) und (d) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für diese drei Aufgabenteile zusammen) in einem gesonderten Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!*

(a) Gegeben sei das folgende Prolog-Programm:

```
a(X, Y) :- b(X, Y).
a(1, 1).
b(X, X) :- c(X).
b(X, Y) :- c(X), !, c(Y).
b(X, Y) :- c(X), c(Y).
c(2).
c(3).
```

Zeichnen Sie einen Suchbaum für die folgende Anfrage: `?- a(X, Y).`

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

(b) Schreiben Sie in `blatt8.pl` ein Prädikat `not_member/2`, sodass `not_member(X, L)` für einen Term `X` und eine Liste `L` genau dann erfüllt ist, wenn `X` mit *keinem* Element von `L` unifiziert werden kann. Verwenden Sie dabei abgesehen vom Cut und dem in SWI-Prolog vordefinierten Prädikat `fail/0` keine weiteren Prädikate, und insbesondere nicht `\=/2`.

(c) Führen Sie in `blatt8.pl` einen neuen Operator `<=>` für die Biimplikation $\leftrightarrow$ ein, der den gleichen Typ und die gleiche Präzedenz wie der in `al.pl` definierte Operator `=>` hat.

(d) Implementieren Sie in `blatt8.pl`, analog zu Beispiel 2.52 im Vorlesungsskript, Schritt 1 des Tseitin-Verfahrens, d. h. schreiben Sie ein Prädikat `tseitin/2`, sodass die Anfrage `tseitin(F, L)` für eine aussagenlogische Formel `F` eine Liste `L` aussagenlogischer Formeln ausgibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

- Die Konjunktion der Formeln in der Liste `L` ist erfüllbarkeitsäquivalent zu `F`.
- Die Liste `L` enthält für jede Teilformel von `F` (abgesehen von Literalen) genau eine Formel.
- In jeder Formel aus `L` kommen höchstens drei verschiedene Aussagensymbole vor.

Beispielsweise sollte Prolog auf die Anfrage:

```
tseitin((p => ~q) \/ (~ (p /\ q) /\ r), L).
```

wie folgt antworten:

```
L = [x1, x1<=>x2\/x3, x2<=> (p=> ~q), x3<=>x4/\r, x4<=> ~x5, x5<=>p/\q].
```

Hierbei sind die konkrete Wahl der neuen Aussagensymbole sowie die Reihenfolge der Formeln in der Repräsentation der Menge unwesentlich.

Hinweise:

- Benutzen Sie zur Erzeugung neuer Aussagensymbole das in SWI-Prolog eingebaute Prädikat `gensym/2`. Das Prädikat `gensym/2` instantiiert bei dem Aufruf `gensym(x, A)` die Variable `A` mit einem Atom der Form xn, wobei eine Zahl n so gewählt wird, dass das Atom xn in diesem Lauf von SWI-Prolog noch nicht verwendet wurde.
- Benutzen Sie den in Teilaufgabe (c) definierten Operator `<=>`.
- Nutzen Sie ggf. Cut oder Negation. Führen Sie bei Bedarf Hilfsprädikate ein.